С. Л. СОБОЛЕВ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С. Л. СОБОЛЕВ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Допущено Министерством Высшего образования СССР в качестве учебного пособия для физико-математических факультетов университетов.

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1947 ЛЕНИНГРАД

Редактор *С. А. Гальперн.* Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*
Подписано к печати 12/IX 1947 г. 27½ печ. л. 29,5 уч.-изд. л.
43.000 тип. знаков в печ. л. А 06439. Тираж 10 000 экз. Цена 10 р. 50 к.
Переплёт 2 р. Заказ № 1238.

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР.
Москва, Трёхпрудный пер., 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ОТ АВТОРА.

Эта книга составлена в результате переработки курса лекций, читанного автором в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. Поэтому автор сохранил за отдельными лекциями их название. Этим объясняется и подбор материала, который был ограничен в объёме количеством лекционных часов.

Автор выражает свою глубокую благодарность акад. В. И. Смирнову, прочитавшему книгу в рукописи, за ряд весьма ценных замечаний, а также проф. В. В. Степанову за полезные указания.

С. Соболев

ЛЕКЦИЯ I.

ВЫВОДЫ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Предмет теории уравнений математической физики составляет изучение дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений для функций одного или нескольких независимых переменных, описывающих то или иное явление природы, по преимуществу физическое.

Определить точные рамки этой дисциплины — довольно трудная задача, как это обычно бывает. Легче всего сделать это, перечислив все вопросы, подлежащие изучению.

Наш курс будет посвящён по преимуществу уравнениям в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией, известным под названиями: волнового уравнения, уравнения Лапласа и уравнения теплопередачи, обычно называемых классическими уравнениями математической физики.

Попутно мы разовьём необходимую теорию смежных вопросов.

Разумеется, охватить полностью все относящиеся сюда разделы в рамках университетского курса довольно трудно, и нам пришлось выбрать то, что, с нашей точки зрения, представлялось наиболее важным.

§ 1. Формула Гаусса-Остроградского.

Прежде чем переходить к выводу тех уравнений математической физики, которыми мы будем в дальнейшем заниматься, напомним одну формулу интегрального исчисления, касающуюся преобразования поверхностных интегралов в объёмные.

Пусть $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ — три функции переменных x, y, z, заданные в некоторой области D' и имеющие в ней непрерывные производные первого порядка по x, по y и по z.

Рассмотрим в D' некоторую замкнутую поверхность S, которая состоит из конечного числа кусков с непрерывно меняющейся на них касательной плоскостью.

Такую поверхность называют *кусочно-гладкой*. Мы будем, кроме того, предполагать, что прямые, *параллельные* координатным осям, встречают её либо в конечном *числе точек*, либо имеют общим целый отрезок.

Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_S (P\cos(nx)+Q\cos(ny)+R\cos(nz))\,dS, \tag{I.1}$$

где через $\cos(nx)$, $\cos(ny)$ и $\cos(nz)$ обозначены косинусы углов, составленных *внутренней нормалью* к поверхности S с осями координат, а dS—положительный элемент поверхности. Пользуясь векторными обозначениями, мы можем считать P, Q, R компонентами некоторого вектора, который обозначим одной буквой $\mathbf{T}$. Тогда

$$P\cos(nx)+Q\cos(ny)+R\cos(nz)=T_n,$$

где T_n—проекция вектора $\mathbf{T}$ на направление внутренней нормали.

Классическая теорема интегрального исчисления позволяет перейти от поверхностного интеграла (I.1) к объёмному, распространённому на область D, ограниченную гладкой поверхностью S (удовлетворяющей перечисленным выше ограничениям). Мы будем иметь:

$$\iint\limits_S (P\cos(nx)+Q\cos(ny)+R\cos(nz))\,dS=$$
$$=-\iiint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

или в векторных обозначениях

$$\iint\limits_S T_n\,dS=-\iiint\limits_D \operatorname{div}\mathbf{T}\,dv, \tag{I.2}$$

где dv обозначает дифференциал объёма, а

$$\operatorname{div}\mathbf{T}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \tag{I.3}$$

(знак div читается «расходимость»).

Приведённая нами формула справедлива в более общих предположениях относительно S. В частности, формула (I.2) имеет место для любой кусочно-гладкой поверхности S, ограничивающей некоторую область D.

В дальнейшем, если не будет сделано оговорок, под словом «поверхность» мы будем понимать кусочно-гладкую поверхность.

Из формулы (I.2) вытекает важное следствие.

Лемма 1. Пусть F — непрерывная функция. Для того чтобы для любой замкнутой поверхности S, проведённой внутри области задания $\boldsymbol{T}$ и ограничивающей область Ω, имело место равенство

$$\iint\limits_S T_n\,dS - \iiint\limits_\Omega F\,dv = 0, \tag{I.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T} + F = 0.$$

Достаточность этого условия очевидна. Установим его необходимость. В самом деле, если бы в некоторой точке A и тем самым в силу непрерывности и в её окрестности функция $\operatorname{div}\boldsymbol{T} + F$ была бы отлична от нуля, например, положительна, то интеграл по малой области ω вокруг A

$$\iiint\limits_\omega (\operatorname{div}\boldsymbol{T} + F)\,dv$$

был бы не равен нулю, следовательно, и левая часть (I.4) была бы также отлична от нуля. Следовательно, наше предположение противоречит условию. Необходимость равенства

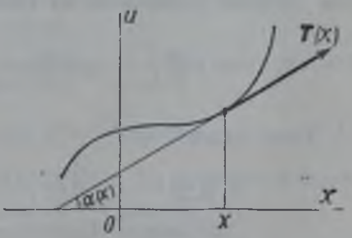
$$\operatorname{div}\boldsymbol{T} + F = 0$$

доказана.

§ 2. Уравнение колебаний струны.

Рассмотрим струну, натянутую между двумя точками. Под словом струна разумеют твёрдое тело, в котором длина значительно превосходит остальные размеры. Поэтому его сопротивлением при изгибании можно пренебречь по сравнению с натяжением.

Пусть направление этой струны совпадает в спокойном состоянии с направлением оси Ox. Под влиянием поперечных сил она примет другую форму, вообще говоря, непрямолинейную.



Черт. 1.

Если мы в некоторой точке x разрежем струну на две части, то влияние правой части на левую выражается в виде силы $\boldsymbol{T}(x)$, направленной по касательной к линии струны (черт. 1). Допустим, для простоты рассуждений, что движение струны происходит в одной плоскости, и обозначим через u отклонение струны от положения равновесия. Пусть уравнение изогнутой линии струны в плоскости xOu будет $u=u(x,t)$. Обозначим через $\rho(x)$ погонную плотность струны, т. е. предел отношения массы малого участка струны к его длине.

Рассмотрим сначала струну, находящуюся в равновесии.

Допустим, что струна находится под действием поперечно действующей нагрузки $p(x)$. Иными словами, если мы выделим участок её $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, то приложенная к этому участку сила направлена по оси u и величина её равна: $\int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$.

Обозначим через $\alpha(x)$ угол, образованный направлением касательной к струне с осью Ox; тогда составляющая на ось u силы натяжения, действующая в точке x_2, будет

$$|\boldsymbol{T}(x_2)|\sin\alpha(x_2)=T(x_2)\sin\alpha(x_2),$$

где $T(x)$ — абсолютная величина (длина) вектора $\boldsymbol{T}(x)$, а составляющая натяжения на ось u в точке x_1 будет:

$$-|\boldsymbol{T}(x_1)|\sin\alpha(x_1)=-T(x_1)\sin\alpha(x_1).$$

Известно, что

$$\sin\alpha=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}};$$

считая величину $\frac{\partial u}{\partial x}$ малой и пренебрегая её квадратом, получим условие равновесия на участке струны в виде

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2}-T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}+\int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx=0. \tag{I.5}$$

Легко видеть, что

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2}-T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}=\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx.$$

Условие (I.5) переходит при этом в условие:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)+p(x)\right]dx=0. \tag{I.6}$$

Подинтегральная функция в (I.6) должна, очевидно, обратиться в нуль тождественно, и уравнение (I.6) перепишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)+p(x)=0. \tag{I.7}$$

Уравнение (I.7) и есть уравнение равновесия струны при поперечной нагрузке $p(x)$.

Если мы теперь перейдём от статического случая к динамическому, т. е. рассмотрим колебания струны, то, пользуясь принципом Даламбера, нужно будет в уравнение равновесия включить ещё и силы инерции струны, которые имеют вид

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx;$$

тогда условие равновесия будет:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p(x)\right]dx=0,$$

и уравнение колебаний струны будет:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p(x)=0. \tag{I.8}$$

Очевидно, что составляющая на ось Ox всех сил, приложенных к струне, также должна быть равна нулю. Это позволяет написать равенство

$$T\cos\alpha\,|_{x=x_2}-T\cos\alpha\,|_{x=x_1}=0.$$

Предположив ещё, что натяжение не зависит от времени, получим с точностью до малых величин высшего порядка

$$T=\text{const}.$$

Если, кроме того, плотность постоянна, а нагрузка $p(x)=0$, то уравнение (I.8) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\text{ где } a^2=\frac{T}{\rho}=\text{const}. \tag{I.9}$$

Уравнение (I.9) рассмотрено ещё в XVIII в. Даламбером и Фурье.

§ 3. Уравнение колебаний мембраны.

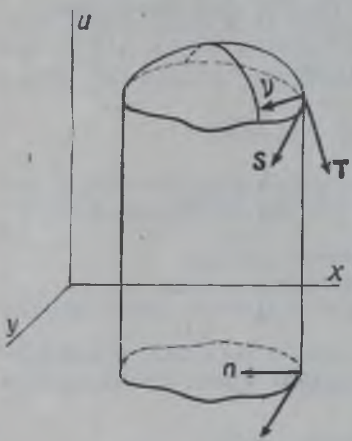
Рассмотрим плёнку, т. е. очень тонкое твёрдое тело, натянутую равномерно по всем направлениям. Пусть в спокойном состоянии она расположена в плоскости xOy. Будем предполагать, что эта плёнка столь тонка, что не сопротивляется изгибу. Такую плёнку мы будем называть мембраной.

Пусть в изогнутом состоянии уравнение её будет

$$u = u(t, x, y).$$

Какой бы участок S этой плёнки (мембраны) мы ни выделили, будем считать, что со стороны остальной части мембраны на этот участок действует направленное по нормали к контуру равномерно распределённое натяжение $\boldsymbol{T}$, лежащее в касательной плоскости к мембране.

Составим уравнение равновесия участка мембраны S, ограниченного кривой s под действием поперечных сил. Составляющая натяжения на ось u будет выражаться как интеграл



Черт. 2.

$$\int_s T\cos(lu)\,ds, \tag{I.10}$$

где T — длина вектора натяжения $\boldsymbol{T}$, а через $\boldsymbol{l}$ обозначен вектор, имеющий направление действия натяжения. Вычислим $\cos(lu)$.

Направление $\boldsymbol{l}$ по условию есть направление общего перпендикуляра к контуру s и к вектору, направленному по внутренней нормали ν к поверхности $u(t, x, y)$. В свою очередь вектор, направленный по касательной $\boldsymbol{s}$ к контуру s, перпендикулярен к нормали ν и к вектору $\boldsymbol{n}$, направленному по внутренней нормали к проекции контура s на плоскость xOy, ибо касательная $\boldsymbol{s}$ и касательная к проекции s на плоскость xOy лежат в касательной плоскости проектирующего цилиндра. Направление $\boldsymbol{s}$ совпадает с направлением векторного произведения

$$\boldsymbol{n} \times \nu,$$

а направление $\boldsymbol{l}$ совпадает с направлением вектора:

$$\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{n} \times \nu) \times \nu.$$

По формулам аналитической геометрии мы имеем для этого последнего:

$$\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{n}\nu^2 + \nu(\boldsymbol{n}\nu).$$

Принимая во внимание, что вектор $\boldsymbol{n}$ имеет составляющие $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, 0, а вектор ν — составляющие $-\frac{\partial u}{\partial x}$, $-\frac{\partial u}{\partial y}$, 1, получим, отбрасывая малые величины 2-го порядка, содержащие $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ и $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$, для составляющих l выражения:

$$-\cos(nx),\quad -\cos(ny),\quad -\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx)-\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny).$$

Подставляя это выражение в уравнение равновесия мембраны, которое в данном случае имеет вид:

$$\iint_{\omega} p(x,\ y)\,dx\,dy+\int_{s} T\cos(lu)\,ds=0,$$

где через $p(x,y)$ обозначена величина поперечно действующей нагрузки, отнесённой к единице площади, а через ω — проекция S на плоскость xOy, получим:

$$\iint_{\omega} p(x,\ y)\,dx\,dy-\int_{s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny)\right)T\,ds=0$$

или в силу леммы 1 (§ 1):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial u}{\partial y}\right)+p(x,y)=0. \tag{I.11}$$

Уравнение колебаний мембраны напишется в виде

$$\iint_{\omega}\left(p(x,\ y)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx\,dy-\int_{s} T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny)\right)ds=0,$$

где $\rho=\rho(x,\ y)$ — плотность мембраны на единицу поверхности, или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial u}{\partial y}\right)+p(x,\ y)-\rho(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{I.12}$$

Из (I.12) при постоянном T будем иметь:

$$T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+p(x,\ y)=\rho(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{I.13}$$

Сумму $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ или в трёхмерном пространстве

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u^2}{\partial z^2}$$

часто называют оператором Лапласа и обозначают символом Δu. При этом уравнение (I.13) можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+\frac{p(x,\ y)}{\rho}, \tag{I.14}$$

где $a^2=\frac{T}{\rho}=\text{const}$.

§ 4. Уравнение неразрывности при движении жидкости и уравнение Лапласа.

Рассмотрим некоторый объём Ω, заполненный жидкостью, ограниченной некоторой гладкой поверхностью S. Рассмотрим наряду с поверхностью S некоторую близкую поверхность S' и изучим, как выражается избыток массы жидкости в S' по сравнению с S. Обозначим через η расстояние от S до S', отсчитанное по нормали к поверхности S [1]).

Очевидно, η будет функцией точки поверхности S. Будем считать η положительным, если S' лежит вне S, и отрицательным в противном случае. Тогда, если ввести в пространстве координаты u, v, w, где u и v определяют положение точки поверхности S, а w — расстояние от точки до S по нормали, искомый избыток выразится интегралом

$$\Delta Q = \iint\limits_S \int\limits_0^\eta \rho \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \, du \, dv \, dw,$$

где ρ — плотность жидкости.

Однако

$$\begin{aligned}
&\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} du\, dv = \\
&= \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \frac{\partial y}{\partial w} \right] du\, dv = \\
&= \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cos(nz) + \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \cos(nx) + \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \cos(ny) \right] du\, dv = dS,
\end{aligned}$$

где dS обозначает элемент поверхности $w = \text{const}$, и

$$\Delta Q = \iint\limits_S \int\limits_0^\eta \rho \, dS \, dw.$$

Предположим, что величина η является функцией переменного t, обращающейся в нуль при $t = 0$; составим производную $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta Q)$. В силу известных правил дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta Q)\Big|_{t=0} = \iint\limits_S \frac{\partial \eta}{\partial t} \rho \cdot dS \Big|_{t=0}.$$

Пусть теперь S представляет собой поверхность, состоящую из некоторых частиц жидкости, перемещающихся в пространстве со скоростью $v(t, x, y, z)$, а S' — её смещённое положение. Подсчитаем $\frac{\partial \eta}{\partial t}$.

---

[1]) Предполагаем, что поверхность S обладает непрерывной кривизной.

Нетрудно видеть, что $\frac{\partial\eta}{\partial t}=v_n$, где v_n — нормальная составляющая скорости v.

При этом

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta Q)\Big|_{t=0}=\iint\limits_S \rho v_n\, dS\,\Big|_{t=0}.$$

Напишем условие того, что жидкость в нашем объёме не исчезла и не создалась. Общее количество жидкости, заключённое в подвижном объёме $\Omega(t)$, будет:

$$Q=\iiint\limits_{\Omega(t)} \rho\, dx\, dy\, dz=\iiint\limits_{\Omega(0)} \rho\, dx\, dy\, dz+\Delta Q,$$

где $\Omega(0)$ — начальное положение этого объёма, откуда, дифференцируя, получаем

$$\frac{dQ}{dt}\Big|_{t=0}=\iiint\limits_{\Omega(0)} \frac{\partial\rho}{\partial t}\Big|_{t=0} dx\, dy\, dz+\iint\limits_S v_n\rho\, dS\,\Big|_{t=0}=0.$$

Момент $t=0$ выбран нами произвольно, и поэтому для любого значения t имеем:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz+\iint\limits_S \rho v_n\, dS=0,$$

откуда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho v)=0, \tag{I.15}$$

или в другом виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0, \tag{I.16}$$

где v_x, v_y, v_z — проекции скорости на оси координат.

Это и есть так называемое уравнение неразрывности. Покажем одно применение этого уравнения для случая установившегося движения несжимаемой жидкости.

Задача о потенциальном движении жидкости есть задача об отыскании неизвестной функции V, называемой потенциалом скоростей, такой, что

$$v=\operatorname{grad} V \quad \text{или} \quad v_x=\frac{\partial V}{\partial x}, \quad v_y=\frac{\partial V}{\partial y}, \quad v_z=\frac{\partial V}{\partial z}.$$

При этом предполагается, что плотность жидкости постоянна, а компоненты скорости не зависят от времени. Подставляя выражения для скоростей в уравнение неразрывности, получим:

$$\rho\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)=0,$$

или

$$\Delta V = 0. \tag{I.17}$$

Таким образом, для решения этой задачи достаточно уметь находить нужные решения уравнения (I.17).

§ 5. Уравнение передачи тепла.

Как известно из курсов физики, теплота представляет собой результат беспорядочного движения частиц вещества. Степень нагретости тела определяется его температурой. Между энергией теплового движения и температурой существует простая зависимость

$$Q = \iiint\limits_D c\rho T\, dv,$$

где D — объём, занимаемый некоторым телом, Q — энергия теплового движения, или, что то же самое, количество тепла в калориях, ρ — плотность вещества, T — температура. Коэффициент c называется теплоёмкостью.

Передача тепла от одного тела к другому или от одного участка среды к другому происходит различными путями. Не принимая во внимание лучеиспускание, химические процессы и т. п., мы будем здесь рассматривать лишь перенос тепла непосредственной передачей кинетической энергии от частицы к частице путём столкновений.

Выделим мысленно участок некоторой гладкой поверхности S, лежащий внутри изучаемой среды, и пусть $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к S. Тепловая энергия движения частиц, расположенных по обе стороны этого участка, с течением времени может изменяться за счёт столкновений их между собою или за счёт перехода частиц через поверхность.

Будем обозначать количество энергии (количество тепла), перешедшей через S за единицу времени в направлении нормали, через $\Delta_S Q$.

Сделаем допущение, что величину $\Delta_S Q$ можно представить в виде

$$\Delta_S Q = \iint\limits_S \chi(S, t)\, ds,$$

где

$$\chi(S, t) = f(x, y, z; \boldsymbol{n}; t).$$

Эти формулы равносильны предположению, что количество тепловой энергии, проходящей через элементарную площадку, зависит только от положения площадки и нормали к ней. Будем ещё предполагать, что f, ρ, c и T — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

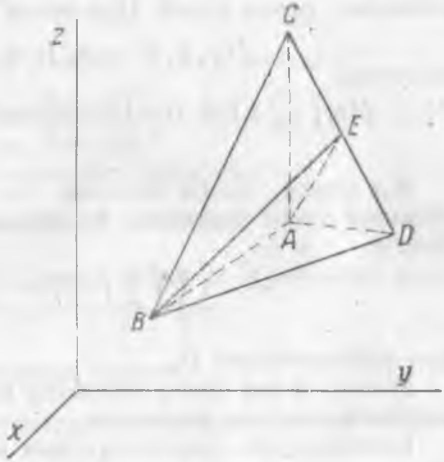
Записывая баланс тепла для объёма D, получим:

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}\iiint_D c\rho T\,dv=\iiint_D \frac{\partial(c\rho T)}{\partial t}\,dv=$$

$$=-\iint_S f(x,\,y,\,z;\,\boldsymbol{n};\,t)\,dS, \qquad (\mathrm{I}.18)$$

где вектор $\boldsymbol{n}$ направлен по внешней нормали.

Объём D является совершенно произвольным. Применим эту формулу, взяв за D тетраэдр Ω, одна из вершин которого лежит в точке x_0, y_0, z_0, а три грани параллельны координатным плоскостям (черт. 3).



Черт. 3.

Обозначим грани этого тетраэдра, перпендикулярные соответственно к осям x, y, z, через S_x, S_y, S_z, а наклонную грань — через S. Обозначим площадь его грани S через σ, а площади остальных граней соответственно через σ_x, σ_y, σ_z. Для σ_x, σ_y и σ_z получим:

$$\sigma_x=\sigma\cos(nx),\quad \sigma_y=\sigma\cos(ny),$$
$$\sigma_z=\sigma\cos(nz),$$

где $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ — направляющие косинусы внешней нормали к грани S. В самом деле, треугольники ADC и BDC имеют одинаковые основания DC, а высота AE треугольника ADC есть проекция высоты BE треугольника BDC на грань ADC. Угол между BE и AE равен углу между нормалями и, значит,

$$\frac{\sigma_x}{\sigma}=\cos nx.$$

Таким же образом доказываются и формулы для σ_y и σ_z.

Применим формулу (I.18) к тетраэдру Ω. Мы получим:

$$\iiint_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(c\rho T)\,dv=\iint_{S_x} f(x,\,y,\,z;\,\boldsymbol{i};\,t)\,d\sigma_x+\iint_{S_y} f(x,\,y,\,z;\,\boldsymbol{j};\,t)\,d\sigma_y+$$

$$+\iint_{S_z} f(x,\,y,\,z;\,\boldsymbol{k};\,t)\,d\sigma_z+\iint_S f(x,\,y,\,z;\,-\boldsymbol{n};\,t)\,d\sigma,$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ обозначают единичные векторы, параллельные координатным осям x, y, z. Если объём Ω равен ω, то теорема о среднем даёт:

$$\omega \frac{\partial}{\partial t}(c\rho T)\big|_{\text{ср}} = \sigma_x v_x\big|_{\text{ср}} + \sigma_y v_y\big|_{\text{ср}} + \sigma_z v_z\big|_{\text{ср}} + \sigma f(x, y, z; -\boldsymbol{n}; t)\big|_{\text{ср}},$$

где положено в целях сокращения

$$v_x = f(x, y, z; \boldsymbol{i}; t), \ v_y = f(x, y, z; \boldsymbol{j}; t), \ v_z = f(x, y, z; \boldsymbol{k}; t).$$

Знаком $|_{\text{ср}}$ обозначено некоторое среднее значение функции. Разделим обе части на σ и перейдём к пределу при $\sigma \to 0$, считая направление $\boldsymbol{n}$ постоянным. Предел левой части будет, очевидно, равен нулю. Принимая во внимание, что

$$f(x, y, z; -\boldsymbol{n}; t) = -f(x, y, z; \boldsymbol{n}, t),$$

получим:

$$f(x_0, y_0, z_0; \boldsymbol{n}, t) = [v_x \cos(nx) + v_y \cos(ny) + \\ + v_z \cos(nz)]\big|_{x_0, y_0, z_0} = v_n\big|_{x_0, y_0, z_0}.$$

Мы видим, таким образом, что функция $f(x, y, z; \boldsymbol{n}; t)$ представляет собою проекцию на направление $\boldsymbol{n}$ некоторого векора v. Имеем

$$\iiint\limits_D \frac{\partial}{\partial t}(\varkappa T)\, dv = -\iint\limits_S v_n\, dS$$

при произвольном D.

Вектор $\boldsymbol{v}$ мы будем называть потоком тепла. Он аналогичен скорости течения жидкости.

Поток тепла, существующий в среде, связан с распределением температуры в ней. В естественных условиях тепло всегда течёт от частей с более высокой температурой к тем частям, температура которых ниже. Выделим некоторую малую площадку dS в нашей среде и будем исследовать, как меняется температура в точках, близких к этой площадке.

Рост температуры характеризуется величиной

$$\frac{dT}{dn} = \boldsymbol{n} \operatorname{grad} T.$$

Естественно предположить, что если температура возрастает в направлении нормали, то поток тепла через площадку S отрицателен. Иными словами, величины

$$\boldsymbol{n} \operatorname{grad} T = \operatorname{grad}_n T \ \text{ и } \ v_n\, dS$$

должны иметь противоположные знаки. Это должно быть верно при любом направлении $\boldsymbol{n}$. Следовательно, проекции векторов $\operatorname{grad} T$ и $\boldsymbol{v}$ на любое направление должны быть обратны по знаку, что возможно только при условии, что эти векторы противоположно направлены. Значит,

$$\boldsymbol{v} = -k \operatorname{grad} T,$$

где k — некоторая положительная скалярная величина, которая может зависеть от свойства среды, от температуры, от характера изменения температуры и т. п. В первом приближении можно считать k функцией только от точки среды. Это предположение хорошо оправдывается на опыте.

Подставляя полученное выражение для $\boldsymbol{v}$ в последнюю формулу для баланса тепла, получим:

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T)\, dV = \iint\limits_{S} k \frac{dT}{dn}\, dS.$$

Применяя лемму из первой лекции, будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right). \qquad (I.19)$$

Предполагая ρ, c и k постоянными, получим:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T, \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{k}{\rho c} = \text{const}. \qquad (I.20)$$

Уравнения (I.19) или (I.20) носят название уравнений передачи тепла, или уравнений теплопроводности.

§ 6. Звуковые волны.

В качестве последнего примера рассмотрим уравнение распространения звука.

Пусть какая-либо сжимаемая жидкость или газ движется со скоростью $\boldsymbol{v}$, проекции которой на оси координат обозначим:

$$v_x(t, x, y, z), \; v_y(t, x, y, z), \; v_z(t, x, y, z).$$

Траектория каждой материальной точки этой жидкости будет определяться уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z.$$

Легко сосчитать её ускорение. Мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \\
&= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (I.21)$$

Напишем уравнение движения жидкости, находящейся под действием силы F с проекциями X, Y, Z, приложенной в каждой точке. Если гидростатическое давление в каждой точке будет $p(t, x, y, z)$, то на некоторую поверхность S, ограничивающую объём Ω, будет действовать сила, составляющая которой на ось x равна:

$$\iint_S p(t, x, y, z) \cos(nx)\, dS.$$

Прибавляя к этому составляющие объёмных сил и сил инерции на ту же ось, получим:

$$\iint_S p \cos(nx)\, dS + \iiint_\Omega X\, dv - \\ - \iiint_\Omega \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) dv = 0,$$

где dv — элемент объёма.

На основании леммы 1 (§ 1) уравнение движения будет:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} - X = 0. \qquad (I.22)$$

Аналогично пишутся два других уравнения для составляющих на оси y и z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} - Y = 0,$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial z} - Z = 0.$$

К этим уравнениям нужно присоединить ещё уравнение неразрывности (I.15) и ещё одно уравнение, связывающее давление с плотностью ρ. Мы предположим, что

$$\rho = f(p); \qquad (I.23)$$

где f — заданная функция. Ограничимся изучением распространения звука в газах.

Для того чтобы из общих уравнений (I.15), (I.22), (I.23) получить нужные нам уравнения распространения звука, мы сделаем несколько упрощающих предположений. Будем считать, что членами типа $\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)$,... и т. д. в уравнениях (I.22) можно пренебречь. Мы получим:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = X, \quad \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = Y, \quad \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = Z.$$

Дифференцируя первое уравнение по x, второе по y, третье по z и складывая, будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial v_y}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial v_z}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=$$
$$=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}. \quad (\mathrm{I}.24)$$

Используя уравнения (1.16) и (1.23) и пренебрегая членами, содержащими произведения величин: $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, $\frac{\partial\rho}{\partial x}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y}$, $\frac{\partial\rho}{\partial z}$, v_x, v_y, v_z, $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial^2\rho}{\partial x\,\partial t}$, ..., $\frac{\partial^2\rho}{\partial z\,\partial t}$, запишем левую часть уравнения (I.24) следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}-v_x\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t}-v_y\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t}-v_z\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=$$
$$=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-f'(p)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-f''(p)\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2.$$

Наконец, принимая $f'(p)$ за постоянную и обозначая правую часть (I.24) $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\Phi$, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\Phi, \quad (\mathrm{I}.25)$$

где a — некоторая постоянная, или

$$\Delta p-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\Phi.$$

Выведенные нами уравнения достаточно характерны. Мы могли бы привести ещё много других примеров, однако, вывод уравнений математической физики не входит в нашу задачу, так как нашей основной целью является исследование и решение таких уравнений.

Поэтому ограничимся указанными примерами и перейдём к изучению различных задач для этих уравнений.

ЛЕКЦИЯ II.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ПРИМЕР АДАМАРА.

§ 1. Начальные и краевые условия.

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение этих уравнений не определяется однозначно.

Решение уравнения

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0 \tag{II.1}$$

зависит, вообще говоря, от n произвольных постоянных

$$y=\varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n). \tag{II.2}$$

Часто можно взять в качестве этих постоянных начальные значения неизвестной функции и её производных:

$$y|_{x=0}=y_0,\ y'|_{x=0}=y_0^{(1)},\ \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=0}=y_0^{(n-1)}. \tag{II.3}$$

Решение вида (II.2) будет общим тогда, когда можно удовлетворить условиям (II.3), выбрав соответствующие значения для постоянных $c_1, \ldots, c_n$; для этого нужно бывает решить некоторую систему уравнений. В частности, если уравнение (II.1) является линейным, то общий интеграл (II.2) имеет весьма простой вид

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n,$$

где функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются системой линейно независимых частных решений.

Подобно этому решение уравнений в частных производных также является неоднозначным. Решение уравнения в частных производных зависит, вообще говоря, от некоторых произвольных функций.

Например, общим решением уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

с двумя независимыми переменными x и y будет

$$u = f(x),$$

где $f(x)$—совершенно произвольная функция.

Для того чтобы сделать решение определённым, обычно нужно задать некоторые дополнительные условия, например, потребовать, чтобы неизвестная функция или её производные принимали заданные значения на различных многообразиях.

Мыслима, вообще говоря, и постановка задачи об отыскании общего вида решений для уравнения в частных производных, аналогичная соответствующей задаче для уравнений вида (II.1). Однако, хотя такие общие решения и существуют, знание их, за редким исключением, ничего не даёт нам для решения важных частных задач, ибо вместо системы конечных уравнений для нахождения $c_1, c_2, \ldots, c_n$, как это имело место для обыкновенных уравнений, мы получим при решении этих частных задач систему столь сложных функциональных соотношений для произвольных функций, что их отыскание практически невозможно.

Каждая задача математической физики ставится как задача решения некоторого уравнения, например (I.9), (I.14), (I.17) или (I.19) при определённых дополнительных условиях, которые в большинстве случаев диктуются её физической постановкой.

Укажем вкратце, какие возможны постановки задач для уравнений, выведенных нами выше.

В задаче о колебании струны естественно, например, рассматривать участок струны $0 \leqslant x \leqslant l$, как закреплённый по обоим концам. Следовательно, нужно искать решения уравнения (I.9), удовлетворяющие условиям

$$u|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad u|_{x=l} = 0. \tag{II.4}$$

Если концы не закреплены, а сами приводятся в движение по определённому закону, то условия (II.4) заменяются условиями

$$u|_{x=0} = f_1(t) \quad \text{и} \quad u|_{x=l} = f_2(t). \tag{II.5}$$

Возможно задание также и других условий на концах. Всех типов подобных заданий мы разбирать не будем.

Задания поведения струны на концах недостаточно для решения задачи. Необходимо ещё знать по крайней мере значение функции u и её скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$ в начальный момент времени, т. е.

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{II.6}$$

Условия (II.5) и (II.6) совместно полностью определяют решение уравнения (I.9). Мы в дальнейшем установим, что при условии некоторой гладкости функций f_1, f_2, φ_0, φ_1 такое решение всегда существует, и, следовательно, среди этих условий нет лишних.

Задача о колебании мембраны ставится совершенно аналогично. Для того чтобы определить её движение, достаточно, например, задать

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= \varphi_0(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= \varphi_1(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{II.7}$$

и значение функции u на границе S

$$u\big|_S = f(S, t), \tag{II.8}$$

где функция $f(S, t)$ зависит от точки на поверхности S и времени t.

Вместо значения u на границе иногда задаётся линейная комбинация:

$$\alpha u\bigg|_S + \beta \frac{du}{dn}\bigg|_S = f(S, t). \tag{II.9}$$

Условия (II.7) и (II.9) делают, как мы установим далее, задачу вполне определённой. Решение, удовлетворяющее им, всегда существует, и поэтому среди условий (II.7) и (II.9) нет лишних.

Для решения задачи о распространении тепла в некотором теле [см. (I.19)] достаточно знать его начальную температуру

$$T\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \tag{II.10}$$

а также условия на границе области тела

$$\alpha T\bigg|_S + \beta \frac{dT}{dn}\bigg|_S = f(S), \tag{II.11}$$

где $f(S)$ обозначает заданную функцию точки на поверхности.

Во всех рассмотренных уравнениях: в уравнении колебаний мембраны и струны, в уравнении теплопроводности вовсе не обязательно рассматривать ограниченное тело. Мы можем рассматривать наряду с этим и неограниченно простирающуюся прямую, плоскость или пространство; тогда условия (II.4), (II.5), (II.8) (II.9) и (II.11), которые обычно называют краевыми или граничными условиями, отпадают. Задача без таких условий носит название задачи Коши; условия (II.6), (II.7) и (II.10) называются начальными условиями или данными Коши.

Мы можем рассматривать тело, в котором, в результате продолжительного действия различных постоянных влияний на границе, внутри тела установилась некоторая температура, постоянная в каждой точке, но меняющаяся от одной точки к другой.

При этом в теле образуется установившееся тепловое состояние. Из уравнения (I.19), полагая $\frac{\partial T}{\partial t}=0$, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0. \qquad \text{(II.12)}$$

Уравнение (II.12) можно решать при условии (II.11). Особый интерес представляют два простейших случая, когда $\alpha=0$ или $\beta=0$. Задача решения уравнения (II.12) при условии

$$T|_S=f(S) \qquad \text{(II.13)}$$

называется задачей Дирихле. Эту же задачу можно ставить и решать и для уравнения с двумя независимыми переменными; тогда уравнение (II.12) запишется так:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0, \qquad \text{(II.14)}$$

и задача может рассматриваться одновременно и как задача о равновесии мембраны.

Другая задача об отыскании решений уравнения (II.12) при условии

$$\frac{dT}{dn}=f(S) \qquad \text{(II.15)}$$

называется задачей Неймана; её также можно рассматривать и для двух независимых переменных. К той же задаче Неймана приводит и задача о потенциальном установившемся движении несжимаемой жидкости (I.17). Желая найти скорости жидкости внутри некоторой области, естественно задать на границе этой области величину нормальной составляющей скорости v_n, которая характеризует поток жидкости через каждую точку поверхности. Но $v_n=\frac{dV}{dn}$, откуда видно, что задача сводится к задаче Неймана, если $v_n=\left.\frac{dV}{dn}\right|_S$ считать заданным.

Для уравнения (II.12), как и для предыдущих, вовсе не обязательно заниматься лишь решением его в конечной области. Очень часто важно бывает решить его для области неограниченной. Это бывает, например, тогда, когда размеры рассматриваемой области очень велики по сравнению с масштабом изучаемого явления. Естественно, например, при изучении явления теплоотдачи некоторого длинного трубопровода, заложенного в земле, считать, что земля является не шаром, а неограниченным полупространством, и решать уравнения (II.12) в полупространстве с вырезанным цилиндром и т. д.

При рассмотрении бесконечных областей далеко не безразлично, как ведёт себя решение в далёких точках изучаемой области; во многих случаях только при известных предположениях об этом поведении задача становится определённой. Например, если решать уравнение (II.12) в бесконечном пространстве с шаровым вырезом (т. е. решать его для внешности некоторого шара), приходится накладывать на решение то дополнительное ограничение, что оно должно обращаться в нуль на бесконечности. Иначе решение остаётся неопределённым.

Важную роль играет ещё одно дополнительное соображение, которому мы уделим некоторое внимание.

§ 2. Понятие о задаче, корректно поставленной. Пример Адамара.

Постановка задач математической физики содержит, как мы видели, некоторые произвольные функции, и решение, вообще говоря, зависит от этих функций. Эти функции определяются обычно из опыта и поэтому не могут быть найдены абсолютно точно.

Всегда неизбежна некоторая погрешность в начальных или граничных условиях. Эта погрешность будет сказываться и на решении, и не всегда погрешность в решении окажется, в свою очередь, малой.

Мы рассмотрим очень простые примеры задач, где это обстоятельство уже не имеет места и когда малая ошибка в данных может повлечь за собой очень большую ошибку в результате. Поэтому, исследуя уравнения математической физики, нам всегда нужно разбирать этот вопрос особо.

Пусть рассматриваемая нами задача математической физики свелась к отысканию некоторой функции $u(x, y, z, t)$ четырёх переменных в какой-то области Ω_t изменения этих переменных, удовлетворяющей в этой области уравнению

$$\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right) = 0. \qquad \text{(II.16)}$$

В примерах, разобранных выше, такой областью служила область Ω независимых переменных x, y, z и какой-то промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant T$.

Пусть искомое решение подчинено дополнительным условиям вида:

$$\Psi_i\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial^r u}{\partial t^r}\right)\Big|_{S_i} = \varphi_i(S_i), \quad i = 1, 2, \ldots, l, \qquad \text{(II.17)}$$

где S_i — некоторое многообразие в пространстве x, y, z, t, число измерений которого меньше четырёх, а $\varphi_j(S_i)$ — заданная функция на многообразии S_i.

Эти условия были поставлены нами выше, например, на многообразиях $t=0$ и на некоторой поверхности S пространства (x, y, z) для всех значений t.

Допустим, что условия (II.17) определяют в Ω_t единственное решение задачи. Мы будем говорить, что в области Ω_t решение зависит от граничных или начальных условий непрерывно, если малые изменения функций, стоящих в этих условиях, влекут за собой малые изменения в решении. Наоборот, мы будем говорить, что решение зависит от этих данных разрывным образом, если малые изменения в функциях $\varphi_j(S_i)$, стоящих в этих данных, не всегда дают малые изменения решения. Понятие непрерывной зависимости в данном случае является более сложным, чем обычное понятие непрерывности функций нескольких переменных. Можно по-разному понимать слова «малые отклонения» в решении или малые отклонения в начальных условиях. Поясним сказанное примерами.

Пусть вместо функций $\varphi_j(S_i)$, которые мы предполагаем обладающими непрерывными производными до порядка k включительно, мы подставим в правую часть (II.17) новые функции:

$$\varphi_j^*(S_i)=\varphi_j(S_i)+\varphi_j'(S_i), \tag{II.18}$$

также имеющие k непрерывных производных.

Условимся говорить, что $\varphi_j^*(S_i)$ отстоит от $\varphi_j(S_i)$ на расстояние не более η до порядка k, если абсолютные величины всех $\varphi_j'(S_i)$ и их частных производных до порядка k не превосходят η. Мы имеем в виду, что дифференцирование производится по каким-нибудь параметрам на многообразии S_i.

Пусть теперь при произвольных таких $\varphi_j^*(S_i)$ рассматриваемая задача имеет решение:

$$u^*=u+u', \tag{II.19}$$

где u — решение задачи, соответствующее функциям $\varphi_j(S_i)$ в правых частях (II.17).

Может случиться, что функция u^* будет отстоять от u на расстояние не более ε до порядка p во всей области Ω_t, как только φ^* будет отстоять от φ на расстояние не более $\eta(\varepsilon)$ до некоторого определённого порядка k.

В этом случае мы будем говорить, что решение зависит от дополнительных условий непрерывно до порядка (p, k) в Ω_t.

Если, наоборот, можно указать такое ε_0, что каково бы ни было η, существуют $\varphi_j^*(S_i)$, отстоящие от $\varphi_j(S_i)$ не более чем на η порядка k, для которых u^* отстоят от u больше чем на ε_0 порядка p. Это решение в Ω_t зависит от дополнительных условий разрывным образом порядка (p, k).

Приведём ещё один пример того, как может быть определено понятие непрерывности.

Будем считать зависимость u от φ_j непрерывной, если неравенство

$$\iiint_{\Omega_t} u'^2 \, dx \, dy \, dz < \varepsilon \tag{II.20}$$

удовлетворяется всегда, как только

$$\iint_{S_t} \varphi_j'^2 (S_t) \, dS_t < \eta(\varepsilon). \tag{II.21}$$

Зависимость u от φ_j может обладать непрерывностью какого-либо одного рода и не обладать непрерывностью другого рода; поэтому каждый раз нужно, говоря о непрерывности, условиться, о каком понимании её идёт речь.

В случае, когда существует область Ω_t изменения независимых переменных, в которой имеется единственное решение задачи, зависящее от φ_j непрерывным образом, мы будем говорить, что задача поставлена корректно, в противном случае назовём задачу поставленной некорректно, в смысле данного определения непрерывной зависимости.

З а м е ч а н и е. Обычно область Ω_t определяется самой задачей и тем промежутком значений параметра (времени) t, для которого ищется решение. Изменение области Ω_t для данной задачи может происходить лишь за счёт изменения упомянутого промежутка значений.

В стационарных задачах, т. е. в задачах, где и уравнение и условия, определяющие решение, не зависят от времени t, как, например, в задачах Дирихле и Неймана, область Ω_t также не зависит от времени и вполне определена самой постановкой задачи.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений задача об интегрировании уравнения

$$\frac{d^m u}{dx^m} = f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}}\right),$$

с начальными условиями

$$u\Big|_{x=0} = u_0, \quad \frac{du}{dx}\Big|_{x=0} = u_1, \ \ldots, \ \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}}\Big|_{x=0} = u_{m-2},$$

при ограничениях, налагаемых на функцию f теоремой существования и единственности, как известно, всегда поставлена корректно.

То же самое относится к уравнениям в частных производных 1-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f\left(t,\ x,\ y,\ z\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial\ },\ \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Задача Коши, т. е. задача решения уравнения при начальных данных, $u|_{t=0}=u_0(x,\ y,\ z)$ для этого уравнения поставлена корректно. Это обстоятельство для уравнений в частных производных более высокого порядка уже не всегда будет иметь место; поэтому ставить для них ту же задачу Коши не всегда имеет смысл.

Разберём следующий пример, принадлежащий Адамару. Найдём решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

в полуплоскости $y>0$, удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{y=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=e^{-\sqrt{n}}\cos nx.$$

Нетрудно видеть, что решение это будет иметь вид

$$u=\frac{1}{n}\,e^{-\sqrt{n}}\cos nx\ \mathrm{ch}\,ny. \tag{II.22}$$

Можно доказать, что такое решение единственно. Легко видеть, что когда n стремится к бесконечности, функция $e^{-\sqrt{n}}\cos nx$ равномерно стремится к нулю и притом не только сама, но и все её производные. Однако решение (II.22) при любом y, отличном от нуля, имеет вид косинусоиды со сколь угодно большой амплитудой и, конечно, не стремится ни к какому пределу. При $x=0$ оно просто неограниченно растёт вместе с n.

Ясно, что здесь ни в какой области x, y, примыкающей к оси $y=0$, и ни при каком из перечисленных выше определений непрерывности говорить о «непрерывной зависимости» решений от начальных данных нельзя, и задача поставлена некорректно в смысле любого из перечисленных определений непрерывности.

Если рассматривать вопрос о непрерывной зависимости в бесконечной области, то даже для обыкновенных уравнений этот вопрос перестаёт быть столь простым. Непрерывная зависимость там носит название «устойчивости по Ляпунову».

Аналогичные вопросы теории уравнений в частных производных также естественно называть теорией устойчивости.

Эти вопросы ещё пока мало разработаны и трудны для элементарного курса, и мы заниматься ими не будем.

Решение задачи, некорректно поставленной, в большинстве случаев не имеет никакой практической ценности.

Разбирая решение всех задач, входящих в курс, мы будем каждый раз останавливаться на корректности их постановки. В следующей лекции мы займёмся более детально изучением различий между всеми теми уравнениями, которые мы до сих пор изучали.

Такое рассмотрение поможет уяснению значительной разницы в постановке задач, указанных нами.

ЛЕКЦИЯ III.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА.

§ 1. Линейные уравнения и квадратичные формы. Канонический вид уравнения.

Все рассмотренные нами до сих пор уравнения представляли собой линейные уравнения 2-го порядка, т. е. уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=F, \qquad \text{(III.1)}$$

где A_{ij}, B_i, C и F представляют собой заданные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для того чтобы изучить свойства этих уравнений более детально, мы займёмся исследованием некоторых свойств их коэффициентов. Посмотрим прежде всего, по какому закону преобразуются коэффициенты уравнения (III.1) при произвольной замене независимых переменных, т. е. при каком-либо геометрическом преобразовании пространства.

Введём вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ новые переменные

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Допустим, что функции $y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n)$ обладают непрерывными вторыми производными.

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}; \qquad \text{(III.2)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_l}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}. \qquad \text{(III.3)}$$

Подставляя выражения (III.2) и (III.3) в уравнение (III.1), мы получим:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right)+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_l}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\right)+Cu=F. \quad \text{(III.4)}$$

Если обозначить через $\overline{A}_{kl}$ новые коэффициенты при вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}$ в уравнении (III.4), то очевидно, что

$$\overline{A}_{kl}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}. \quad \text{(III.5)}$$

Фиксируем определённую точку пространства, и пусть

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i}=\alpha_{ki}. \quad \text{(III.6)}$$

Формулы преобразования

$$\overline{A}_{kl}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{lj} \quad \text{(III.7)}$$

совпадают с формулами преобразования коэффициентов квадратичной формы:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}p_i p_j, \quad \text{(III.8)}$$

которое эта форма испытывает, если сделать в ней замену

$$p_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}q_k, \quad \text{(III.9)}$$

переводящую её в форму

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\overline{A}_{kl}q_k q_l. \quad \text{(III.10)}$$

Поэтому, если мы хотим, чтобы замена переменных помогла нам как-либо упростить уравнение (III.1), мы можем вместо этой задачи рассмотреть другую задачу об упрощении вида квадратичной формы (III.8) при помощи замены переменных (III.9) с вещественными α_{ki}.

Такая задача встречается в курсе аналитической геометрии при упрощении уравнений поверхностей 2-го порядка. Здесь эта задача будет ещё проще, так как мы не связаны ортогональностью преобразований, и нам нет надобности требовать, чтобы в пространстве $p_1, p_2, \ldots, p_n$ направления осей $q_1, q_2, \ldots, q_n$ были ортогональны.

Мы знаем, что при $n=2, 3$ всегда можно выбрать коэффициенты преобразования таким образом, чтобы квадратичная форма (III.8) приняла вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}p_ip_j = \sum_{l=1}^{n} k_l q_l^2 \text{ [1]}, \tag{III.11}$$

где k_l — некоторые числа, положительные или отрицательные. Легко установить, что представление (III.11) всегда возможно и для n переменных.

В самом деле, если форма наша зависит от переменного p_1, то в ней должен быть хотя бы один коэффициент A_{ij}, не равный нулю.

Предполагая $A_{11} \neq 0$, возьмём выражение q_1 в виде

$$q_1 = p_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{A_{1i}}{A_{11}} p_i.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}p_ip_j - A_{11}q_1^2 = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n} A_{ij}^{(1)}p_ip_j \tag{III.12}$$

будет уже квадратичной формой $n-1$ переменного, так как все члены с p_1^2 и с произведениями p_1p_i в ней сократятся.

Если $A_{11}=0$ и $A_{22}=0$, но $A_{12}\neq 0$, то форму можно представить в виде:

$$A_{12}p_1p_2 + \sum_{i=3}^{n} A_{1i}p_1p_i + \sum_{i=3}^{n} A_{2i}p_2p_i + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} A_{ij}p_ip_j.$$

Совершим замену переменных, полагая $p_1 = q_1 + q_2$, $p_2 = q_1 - q_2$; тогда наша форма перепишется следующим образом:

$$A_{12}q_1^2 - A_{12}q_2^2 + \sum_{i=3}^{n}(A_{1i}+A_{2i})\,q_1p_i + \sum_{i=3}^{n}(A_{1i}-A_{2i})\,q_2p_i + \\ + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} A_{ij}p_ip_j\,,$$

и вопрос сводится к предыдущему случаю.

[1]) Можно даже всегда так преобразовать форму, чтобы все k_l равнялись $+1$ или -1, но для нас это сейчас несущественно.

Роль A_{12} может играть любой коэффициент A_{1i}, поэтому наше преобразование всегда возможно.

Из полученной формы (III.12) от $(n-1)$ переменных можно опять выделить тем же путём число $k_2 q_2^2$ так, чтобы получить форму $(n-2)$ переменных. Двигаясь таким путём, мы исчерпаем нашу форму либо на последнем шаге, когда останется лишь форма от p_n, т. е. $k_n p_n^2$, либо ещё раньше.

Теорема 1. (Закон инерции квадратичных форм.) Каким бы способом ни производить приведение квадратичной формы (III.8) к виду (III.11) с линейно независимыми $q_1, q_2, \ldots, q_n$, при этом всегда останется инвариантным число положительных среди чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, а также число отрицательных.

Отсюда, между прочим, следует, что число k_n, неравных нулю, также одинаково при всех представлениях (III.11).

Приведя нашу форму двумя способами к сумме квадратов, мы получим равенство

$$\sum_{l=1}^{n} k_l q_l^2 = \sum_{s=1}^{n} \rho_s m_s^2, \tag{III.13}$$

где m_s и q_l — координаты пространства, выбранные в обоих случаях, связаны между собой линейными соотношениями

$$m_s = \sum_{l=1}^{n} \beta_{sl} q_l.$$

Допустим, что число положительных k_l больше, чем число положительных ρ_s. Приравняем нулю все те q_l, коэффициенты при квадратах которых не положительны (отрицательны или равны нулю). Если считать, что

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_r > 0 \geqslant k_{r+1} \geqslant k_{r+2} \geqslant \ldots \geqslant k_n,$$

то положим

$$q_{r+1} = q_{r+2} = \ldots = q_n = 0.$$

Приравняем теперь нулю все те m_s, коэффициенты при квадратах которых в правой части (III.13) положительны. Мы получим таким путём систему уравнений для определения $q_1, q_2, \ldots, q_r$. Ввиду того что число этих уравнений меньше, чем число неизвестных, мы можем всегда найти решение этой системы, в котором не все $q_1, q_2, \ldots, q_r$ обращаются в нуль. Подставляя эти значения $q_1, q_2, \ldots, q_r$ в уравнение (III.13), мы видим, что левая часть его будет положительна, а правая неположительна, следовательно, равенство (III.13) не имеет места, и наше предположение неверно.

Теорема доказана.

Эта теорема позволяет получить классификацию уравнений в частных производных 2-го порядка.

В каждой точке пространства мы можем совершить замену независимых переменных p_i таким образом, чтобы в этой точке форма

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} p_i p_j$$

была бы просто суммой квадратов с некоторыми коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n} k_i p_i^2.$$

Далее, простая замена

$$q_i = \sqrt{|k_i|}\, p_i$$

превращает нашу форму в

$$\sum_{i=1}^{r} q_i^2 - \sum_{i=r+1}^{m} q_i^2.$$

Каждой линейной подстановке величин $p_1, p_2, \ldots, p_n$ отвечает замена переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

При этом в новых координатах все коэффициенты при смешанных производных 2-го порядка обратятся в нуль, а коэффициенты при тех производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, которые не обратятся в нуль, будут равны ± 1.

Как мы увидим в дальнейшем, характер уравнения 2-го порядка полностью определится числом r положительных и числом s отрицательных коэффициентов после такого преобразования. Если мы будем разбирать уравнения с переменными коэффициентами, то в разных точках будем иметь, может быть, разные значения чисел r и s. При этом удобно, разбив пространство на части, где r и s постоянны, исследовать уравнение порознь в каждой части. Если мы исследуем уравнение с постоянными коэффициентами, то числа r и s останутся одинаковыми во всём пространстве, и линейное преобразование переменных приводит коэффициенты при вторых производных к значениям ± 1 сразу во всём пространстве.

Мы будем называть такой вид уравнения, в котором вторые смешанные производные не входят вовсе, каноническим. В области, где r и s сохраняют постоянные значения, мы будем говорить, что уравнение принадлежит к типу (s, r); очевидно, что типы (r, s) и (s, r) по существу совпадают, так как перемена знаков у всех коэффициентов меняет r и s местами. Уравнение колебаний струны будет иметь тип $(1, 1)$ при $n=2$. Уравнение колебаний мембраны—тип $(2,1)$ при $n=3$.

Уравнение передачи тепла будет принадлежать к типу $(3,0)$ при $n=4$. Уравнение Лапласа—к типу $(3, 0)$ при $n=3$.

Мы будем называть тип $(n, 0)$ эллиптическим типом; типы (r, s), где $r+s=n$, $s>0$, $r>0$, гиперболическими. Из них тип $(n-1, 1)$ мы будем называть нормально-гиперболическим. Типы (r, s), где $r+s<n$, будут параболическими.

Нормально-параболическим назовём тип $(n-1, 0)$. Параболические типы, где $s=0$, будут называться эллиптико-параболическими, а типы, где $r>0$ и $s>0$,—гиперболо-параболическими.

Уравнения колебаний струны и мембраны (I.9) и (I.13) принадлежат, очевидно, к нормально-гиперболическому типу, уравнение теплопроводности (I.19)—к нормально-параболическому, а уравнение Лапласа—к эллиптическому.

В нашем курсе мы ограничимся лишь изучением нормально-гиперболического, нормально-параболического и эллиптического типов. Все уравнения, рассмотренные нами в лекции I, имели канонический вид и относились именно к этим типам. Мы видим, таким образом, что эти уравнения не сводимы одно к другому простыми координатными преобразованиями, и, что каждое из них является в некотором роде типичным.

З а м е ч а н и е. Координатная система, в которой уравнение принимает канонический вид, не является единственной.

Уравнение Лапласа $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ остаётся инвариантным при любом переносе начала координат и ортогональном преобразовании осей.

В самом деле, коэффициенты $\overline{A}_{kl}$ после такого поворота будут иметь вид

$$\overline{A}_{kl}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{il},$$

где

$$\alpha_{ik}=\frac{\partial y_k}{\partial x_i}=\cos(y_k, x_i),$$

и, так как в силу условия ортогональности

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{il}=\begin{cases}1\,(k=l),\\0\,(k\neq l),\end{cases}\quad\text{то}\quad \overline{A}_{kl}=\begin{cases}1\,(k=l),\\0\,(k\neq l),\end{cases}$$

что и требовалось доказать. Преобразования независимых переменных, оставляющие волновое уравнение инвариантным, носят название преобразований Лоренца. В теории относительности в физике они играют важную роль.

§ 2. Канонический вид уравнений с двумя независимыми переменными.

Уравнение с числом независимых переменных, большим двух, как мы видели, легко приводится к каноническому виду в каждой данной точке пространства, если только выбрать переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ таким образом, чтобы в этой точке

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \alpha^0_{ki}, \tag{III.14}$$

где α^0_{ki}—значения α_{ki} для выбранной точки пространства, т. е. чтобы коэффициенты преобразования квадратичной формы принимали некоторые определённые значения в этой точке пространства. Это будет, например, если положить

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha^0_{ki} x_i.$$

Для такого приведения, которое нам нужно, нет даже надобности считать выполненными равенства (III.14); достаточно взять $\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ пропорциональными α_{ki}, т. е. считать

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \lambda_k \alpha_{ki}, \tag{III.15}$$

где λ_k—произвольные величины.

Будем теперь пытаться удовлетворить условиям (III.15), считая α_{ki} заданными, а λ_k совершенно произвольными функциями независимых переменных. Если это удастся, то мы можем привести уравнение к каноническому виду сразу во всём пространстве.

Условия (III.15) дают, вообще говоря, несовместную систему уравнений за исключением случая $n=2$.

При $n=2$ мы будем иметь

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \lambda_1 \alpha_{11}(x_1, x_2), \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \lambda_1 \alpha_{12}(x_1, x_2),$$

и, следовательно,

$$\frac{\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}} = \frac{\alpha_{11}(x_1, x_2)}{\alpha_{12}(x_1, x_2)}. \tag{III.16}$$

Уравнение (III.16) говорит о том, что вдоль линии

$$y_1 = \text{const.}, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{a_{11}(x_1, x_2)}{a_{12}(x_1, x_2)}.$$

Отсюда легко построить систему линий

$$y_1 = \text{const}.$$

Аналогично обыкновенное уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{a_{21}(x_{21}\, x_2)}{a_{22}(x_1, x_2)}$$

даёт линию $y_2 = \text{const}$. Следовательно, обе системы этих линий могут быть построены, и криволинейные координаты, в которых уравнение принимает канонический вид, существуют.

§ 3. Второй канонический вид гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными.

Гиперболические уравнения с двумя независимыми переменными могут быть приведены ещё к одному виду, который мы будем называть вторым каноническим видом. Пусть члены со вторыми производными в некотором уравнении 2-го порядка имеют вид

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{III.17}$$

где

$$a(x, y) > 0 \text{ и } b(x, y) > 0.$$

Вместо уничтожения коэффициента при смешанной производной мы можем попытаться избавиться от вторых производных, взятых два раза по одному и тому же переменному. Вводя вместо x и y новые независимые переменные ξ и η, мы получим выражение для новых коэффициентов:

$$\bar{A}_{11} = a(x, y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 - b(x, y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$\bar{A}_{12} = a(x, y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} - b(x, y)\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\bar{A}_{22} = a(x, y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 - b(x, y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

Если положить $\bar{A}_{11} = 0$ и $\bar{A}_{22} = 0$, то мы получим для $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ одно и то же уравнение в частных производных первого порядка:

$$a(x, y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 - b(x, y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

или

$$\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\frac{\partial\xi}{\partial y}}=\pm\sqrt{\frac{b(x,y)}{a(x,y)}}. \tag{III.18}$$

Линии $\xi=\text{const.}$ или $\eta=\text{const.}$, где ξ и η удовлетворяют уравнению (III.18), называются характеристиками.

Пользуясь тем, что вдоль характеристики

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\frac{\partial\xi}{\partial y}},$$

мы можем переписать уравнение (III.18) в виде

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{b(x,y)}{a(x,y)}}. \tag{III.19}$$

Два знака в (III.19) дают нам возможность выбрать две системы линий, удовлетворяющие уравнению. Взяв интегралы уравнения (III.19) за ξ и η, мы проведём уравнение (III.17) к виду

$$c(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\ldots=0, \tag{III.20}$$

где $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ уже не входят в его левую часть.

Коэффициент $c(\xi,\eta)$, вообще говоря, не равен нулю, если уравнение не вырождается.

Деля на него уравнение (III.20), дадим этому уравнению вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\ldots=0. \tag{III.21}$$

К виду (III.21) можно было бы приводить гиперболическое уравнение с двумя переменными и непосредственно, не пользуясь промежуточным видом (III.17).

Так как при этом все выкладки остаются совершенно аналогичными, то мы не будем останавливаться на этом вопросе, предоставляя слушателям провести рассуждения самим.

§ 4. Характеристики.

Введение подобранных соответственно переменных ξ и η избавило нас в уравнении гиперболического типа с двумя переменными от членов, содержащих $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$.

В общем случае n переменных мы также могли бы, выбрав координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$, добиться, например, того, чтобы в уравнение не вошли вовсе члены, содержащие $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}$. Мы видели, что коэффициент при этом члене $\overline{A}_{11}$ выражается формулой

$$\overline{A}_{11} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \alpha_{i1} \alpha_{j1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} . \qquad \text{(III.22)}$$

Формула (III.22) показывает, что уничтожение $\overline{A}_{11}$ есть свойство только семейства поверхностей $y_1 = \text{const.}$ и совершенно не зависит от выбора $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Как хорошо известно из курса дифференциального исчисления, производные $\frac{\partial y_1}{\partial x_j}$ пропорциональны направляющим косинусам нормали к поверхности $y_1 = \text{const.}$ в данной точке этой поверхности. В силу этого обращение в нуль $\overline{A}_{11}$ зависит только от направления нормали к данной поверхности $y_1 = \text{const.}$ в каждой её точке и поэтому есть индивидуальное свойство каждой поверхности $y_1 = \text{const.}$

Поверхность

$$y_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$$

называется характеристикой уравнения (III.1), *если при замене переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *на переменные* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *где* $y_2, \ldots, y_n$ — *произвольные функции* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *коэффициент* $\overline{A}_{11}$ *при* $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}$ *обращается в нуль при* $y_1 = c$.

Нетрудно проверить, что уравнения эллиптического типа не имеют вещественных характеристик, ибо $\overline{A}_{11}$ представляет собою положительно определённую квадратичную форму относительно α_{i1} и не может обратиться в нуль.

Если в уравнении

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + C_u = F$$

поверхность $x_1 = 0$ есть характеристика, т. е. $A_{11}|_{x_1=0} = 0$, то это уравнение представляет собою дифференциальное уравнение, связывающее $u|_{x_1=0}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{x_1=0}$. В самом деле, мы можем переписать его при $x_1 = 0$ в виде:

$$2 \sum_{i=2}^{n} A_{1i}\Big|_{x_1=0} \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} \right) + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} A_{ij}\Big|_{x_1=0} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u|_{x_1=0}) +$$

$$+ B_1|_{x_1=0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} \right) + \sum_{i=2}^{n} B_i|_{x_1=0} \frac{\partial}{\partial x_i} (u|_{x_1=0}) +$$

$$+ C|_{x_1=0} (u|_{x_1=0}) = F|_{x_1=0}.$$

Задачей Коши для уравнения второго порядка в общем виде называют задачу о нахождении решения этого уравнения, удовлетворяющего на некоторой поверхности S условиям:

$$u\Big|_S=\varphi_0; \quad \frac{du}{dn}\Big|_S=\varphi_1.$$

Из последнего равенства следует, что и $u\,|_{x_1=0}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}$ не являются независимыми функциями переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$, и задачу Коши для этой поверхности $x_1=0$ ставить нельзя, ибо, задавая произвольно $u\,|_{x_1=0}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}$, мы придём к противоречию.

Это свойство уравнений не зависит от выбора координатной системы, если только при изменении системы координат поверхность $x_1=0$ оставляется неизменной.

Инвариантности этого свойства не противоречит то обстоятельство, что производная $\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}$ вообще не остаётся инвариантной. Это объясняется тем, что при всех преобразованиях, сохраняющих $x_1=0$, новое значение $\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}$ есть линейная комбинация старого $\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}$ и производных $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\,|_{x_1=0}\right)$, $i=2, 3, \ldots, n$.

Для случая двух переменных, как мы видели, характеристики (если они существуют) образуют два семейства линий.

Через каждую точку проходят две характеристики, определяемые уравнением

$$A_{11}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2+2A_{12}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+A_{22}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2=0 \qquad \text{(III.23)}$$

или, что то же самое, уравнением

$$A_{11}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2-2A_{12}\frac{dx_2}{dx_2}+A_{22}=0, \qquad \text{(III.24)}$$

которое получается из первого приёмом, использованным ранее, ибо вдоль характеристики

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}}.$$

ЛЕКЦИЯ IV.

УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ И ЕГО РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ДАЛАМБЕРА.

§ 1. Формула Даламбера. Неограниченная струна.

Приводя к каноническому виду уравнение свободных колебаний струны, т. е. уравнение колебаний в отсутствии внешних поперечных сил

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{IV.1}$$

где $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, мы положим

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - at, \\ \eta &= x + at. \end{aligned}\right\} \tag{IV.2}$$

Тогда уравнение (IV.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0. \tag{IV.3}$$

Решение уравнения (IV.3) легко получается в общем виде, причём полученное общее решение, в противоположность тому общему положению, о котором мы говорили в лекции II, легко позволяет получить также и решения различных конкретных задач.

Из (IV. 3) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \psi_2'(\eta), \tag{IV.4}$$

где $\psi_2'(\eta)$—произвольная функция.

Из (IV.4) находим:

$$u = \psi_2(\eta) + \psi_1(\xi),$$

где $\psi_1(\xi)$—произвольная функция. Возвращаясь к переменным x, t, получаем

$$u=\psi_1(x-at)+\psi_2(x+at). \tag{IV.5}$$

Полученное решение зависит от двух произвольных функций ψ_1 и ψ_2. Решение (IV.5) называется решением Даламбера.

Для того чтобы решить ту или иную задачу математической физики, мы должны лишь в каждом конкретном случае определить ψ_1 и ψ_2.

Рассмотрим прежде всего задачу Коши для неограниченной струны, т. е. задачу отыскания решения, удовлетворяющего условиям

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{t=0}&=\varphi_0(x),\\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}&=\varphi_1(x). \end{aligned}\right\} \tag{IV.6}$$

Подставляя формулу (IV.5) в (IV.6), будем иметь:

$$\begin{gathered} \psi_1(x)+\psi_2(x)=\varphi_0(x),\\ -a\psi_1'(x)+a\psi_2'(x)=\varphi_1(x), \end{gathered}$$

откуда

$$-a\psi_1(x)+a\psi_2(x)=\int_0^x\varphi_1(x)\,dx+aC,$$

или

$$\psi_1(x)=\frac{1}{2}\Big[\varphi_0(x)-\frac{1}{a}\int_0^x\varphi_1(x)\,dx-C\Big],$$

$$\psi_2(x)=\frac{1}{2}\Big[\varphi_0(x)+\frac{1}{a}\int_0^x\varphi_1(x)\,dx+C\Big].$$

При этом

$$u=\frac{1}{2}\Big[\varphi_0(x-at)-\frac{1}{a}\int_0^{x-at}\varphi_1(y)\,dy-C+\varphi_0(x+at)+ \\ +\frac{1}{a}\int_0^{x+at}\varphi_1(y)\,dy+C\Big],$$

и окончательно, получаем формулу

$$u=\frac{1}{2}\Big[\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(y)\,dy\Big]. \tag{IV.7}$$

Формула (IV.7) даёт так называемый интеграл Даламбера уравнения (IV.1).

Очевидно, что полученное решение удовлетворяет уравнению (IV.1), а также начальным условиям. Способ вывода (IV.7) доказывает единственность решения поставленной задачи. Несомненна далее корректность постановки задачи. Для каждого $\varepsilon > 0$ мы можем указать такое η, что если мы заменим $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ на $\varphi_0^{(1)}(x)$ и $\varphi_0^{(1)}(x)$ так, что

$$|\varphi_0(x)-\varphi_0^{(1)}(x)| < \eta, \quad |\varphi_1(x)-\varphi_1^{(1)}(x)| < \eta,$$

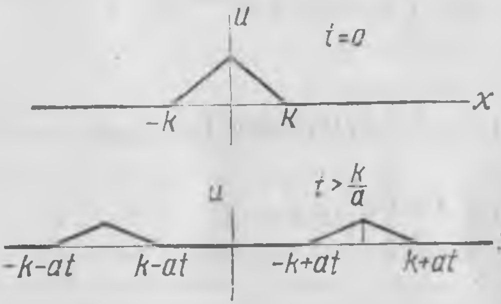
то решение будет отличаться по абсолютной величине меньше, чем на ε от первоначального на любом конечном отрезке времени. Полезно проследить несколько подробнее качественную картину колебания неограниченной струны. Разберём несколько простейших случаев.

Случай 1. Функция $\varphi_1(x)$ тождественно равна 0, функция $\varphi_0(x)$ отлична от нуля лишь в конечном промежутке $-k \leqslant x \leqslant k$.

Решение (IV.7) выражается при этом формулой

$$u = \frac{1}{2}[\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)];$$

слагаемое $\frac{1}{2}\varphi_0(x-at)$ есть постоянное по форме возмущение, передвигающееся со скоростью a в положительном направлении по оси x. Это ясно из того, что, поместив начало подвижной системы координат ξ в точке at, т. е. полагая $\xi = x - at$, мы будем видеть возмущение постоянным. Аналогично, слагаемое $\frac{1}{2}\varphi_0(x+at)$ есть такое же по форме возмущение, идущее в другую сторону. Возмущения эти называются волнами. Первое — прямая волна, а второе — обратная волна. Вначале волны налегают одна на другую, а затем расходятся и потом всё больше разбегаются в разные стороны друг от друга.



Черт. 4.

В каждом месте струны после прохождения обеих волн (а для точек, лежащих вне области начального возмущения, после прохождения только одной) воцаряется покой. Схематически вид возмущённой струны изображён на черт. 4.

Случай 2. Функция $\varphi_0(x)$ тождественно равна нулю, а $\varphi_1(x)$ отлична от нуля лишь в конечном промежутке $-k \leqslant x \leqslant k$. В таком случае говорят иногда, что струна не имеет начального возмущения, а имеет лишь начальный импульс.

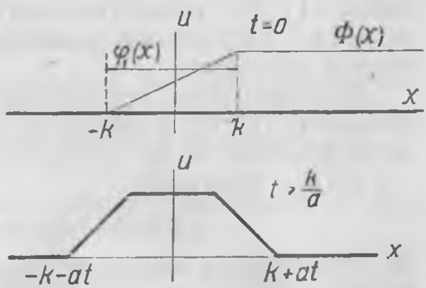
Рассмотрим функцию $\Phi_1(x)$, первообразную для $\varphi_1(x)$, равную нулю при значениях x в промежутке $-\infty < x \leqslant -k$. Она будет, вообще говоря, не равна нулю, но равна некоторой постоянной при $x \geqslant k$.

Формула (IV.7) даёт:

$$u = \frac{1}{2a}\left[\Phi(x+at) - \Phi(x-at)\right].$$

В этом случае по струне опять бегут две волны — одна прямая и одна обратная. Волны эти будут отличаться лишь знаком одна от другой.

Там, где обе волны — и прямая, и обратная — уже прошли, струна примет положение покоя, но не вернётся к исходному положению, так как $x + at > k$ и $\Phi(x+at)$ будет при этом равна постоянной, а $x - at < k$ и $\Phi(x-at)$ равна нулю.



Черт. 5.

В струне останется так называемое остаточное смещение. Форма отклонения струны в этом случае изображена на черт. 5.

§ 2. Струна с двумя закреплёнными концами.

Рассмотрим теперь струну с закреплёнными концами и будем искать решение при условиях (IV. 6) и условиях

$$u|_{x=0} = 0 \text{ и } u|_{x=l} = 0.$$

Функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ в этом случае, очевидно, будут заданы только в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$.

Возвращаясь к формуле (IV.5), мы видим, что нужно определить $\psi_1(x)$ в промежутке от $-\infty$ до l, а $\psi_2(x)$ в промежутке от 0 до $+\infty$. Подставляя в решение (IV.5) $x = 0$ и $x = l$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(-at) + \psi_2(at) = 0, \\ \psi_1(l-at) + \psi_2(l+at) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.8)}$$

Всякие две функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, удовлетворяющие (IV.8), дают решение поставленной задачи.

Первое из условий (IV.8) позволяет выразить функцию $\psi_2(x)$ при положительных значениях аргумента через $\psi_1(x)$ при отрицательных значениях аргумента. Подставляя функцию $\psi_2(l+at)$, определяемую из первого условия (IV.8), во второе, получим:

$$\psi_1(l-at)-\psi_1(-l-at)=0. \qquad \text{(IV.9)}$$

Эта формула говорит нам, что функция $\psi_1(x)$ должна быть периодической с периодом $2l$ во всей области, где она нас интересует.

Рассматривая систему (IV.8), как систему уравнений с двумя неизвестными функциями, мы видим, что первое из этих уравнений можно рассматривать как определение $\psi_2(x)$. При этом очевидно, что эта система полностью эквивалентна уравнению (IV.9), удовлетворение которого обеспечивает удовлетворение второго из уравнений (IV.8). Формулируем полученный результат.

Нами доказано, что всякое решение уравнения (IV.1) при условиях (IV.8) выражается через произвольную периодическую функцию $\psi_1(x)$ с периодом $2l$, заданную в промежутке $-l\leqslant x\leqslant l$ формулой

$$u=\psi_1(x-at)-\psi_1(-x-at). \qquad \text{(IV.10)}$$

Не ограничивая общности, можно распространить $\psi_1(x)$ на всю прямую $-\infty<x<+\infty$. При этом формула (IV.10) для промежутка $-\infty<x<+\infty$ даёт то решение задачи колебания неограниченной струны, которое на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$ совпадает с искомым.

Полагая в (IV.10) $t=0$, видим, что

$$u\,|_{t=0}=\psi_1(x)-\psi_1(-x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=-a\,[\psi_1'(x)-\psi_1'(-x)].$$

Но $\psi_1(x)-\psi_1(-x)$ есть, как легко видеть, нечётная функция, имеющая, по доказанному, период $2l$. Такую функцию легко построить полностью по её значению на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$, где имеем равенство:

$$\psi_1(x)-\psi_1(-x)=\varphi_0(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l;$$

аналогично, исходя из равенства

$$-a\psi_1'(x)+a\psi_1'(-x)=\varphi_1(x) \quad \text{при } 0\leqslant x\leqslant l,$$

легко строим $-a\,[\psi_1'(x)-\psi_1'(-x)]$ везде как нечётную периодическую функцию. Это равносильно продолжению функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ на всю прямую нечётным периодическим образом.

Отсюда следует, что решение нашей задачи должно выражаться той же формулой (IV.7), если в ней считать $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ нечётными периодическими функциями. Формула (IV.7) действительно даёт искомое решение, так как из нечётности начальных условий следует, что $u|_{x=0}=0$; точка же $x=l$ ничем не отличается от точки $x=0$.

Необходимо сделать одно важное замечание. Строго говоря, функция, даваемая формулой (IV.5), будет удовлетворять уравнению в том случае, если $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ непрерывны вместе со своими производными до 2-го порядка.

Возникает вопрос, будет ли полученное нами решение обладать этим свойством.

Очевидно, это можно гарантировать, если $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ после своего продолжения будут удовлетворять этому условию. Слушатели могут сами проверить, что для этого достаточно, например, иметь:

$$\varphi_0(l)=\varphi_0^{''}(l)=\varphi_0(0)=\varphi_0^{''}(0)=0,$$
$$\varphi_1(l)=\varphi_1^{''}(l)=\varphi_1(0)=\varphi_1^{''}(0)=0.$$

Однако можно рассматривать и функции, не удовлетворяющие всем этим условиям. Тогда приходится соответствующим образом обобщить класс рассматриваемых решений уравнения (IV.1).

§ 3. Решение задачи для неоднородного уравнения и для более общих граничных условий.

Рассмотрим теперь более общую задачу. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=p(x,t) \qquad \text{(IV.11)}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} \alpha u\Big|_{x=0}+\beta\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}&=f_1(t),\\ \gamma u\Big|_{x=l}+\delta\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}&=f_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.12)}$$

и

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{t=0}&=\varphi_0(x),\\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}&=\varphi_1(x). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.13)}$$

Отметим, что решение ищется в области, определяемой неравенствами $0<x<l$ и $0<t$.

Прежде всего заметим, что легко построить некоторое частное решение уравнения (IV.11), не удовлетворяющее, правда, условиям (IV.12) и (IV.13).

Вводя переменные ξ и η, при помощи формул

$$\xi=x-at,\quad \eta=x+at \qquad \text{(IV.14)}$$

преобразуем уравнение (IV.11) к виду

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=Q(\xi,\eta). \qquad \text{(IV.15)}$$

Область изменения переменных ξ и η будет:

$$\eta-\xi>0, \tag{IV.16}$$

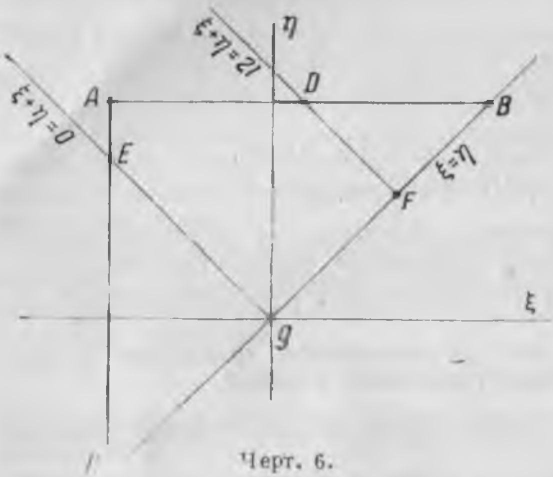
$$0<\xi+\eta<2l; \tag{IV.17}$$

на чертеже это будет полуполоса (черт. 6). Продолжим функцию $Q(\xi, \eta)$ совершенно произвольным образом за обе прямые

$$\xi+\eta=0,$$

$$\xi+\eta=2l,$$

определив её во всей полуплоскости (IV.16). Если мы найдём решение уравнения (IV.15) во всей полуплоскости, то оно, очевидно, будет удовлетворять нашему уравнению и в полосе, определяемой неравенствами (IV.16) и (IV.17).



Черт. 6.

Будем искать частное решение v_1 уравнения (IV.15). Полагая

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta}=z(\xi, \eta), \tag{IV.18}$$

из (IV.15) получим

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{1}{4}\,Q(\xi, \eta); \tag{IV.19}$$

частное решение (IV.19) имеет вид

$$z(\xi, \eta)=\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi} Q(\alpha, \eta)\,d\alpha. \tag{IV.20}$$

Далее частное решение (VI.18) будет:

$$v_1=\int_{\xi}^{\eta} z(\xi, \beta)\,d\beta \tag{IV.21}$$

или, сопоставляя (IV.20) и (IV.21), имеем частное решение уравнения (IV.15) в виде

$$v_1=\frac{1}{4}\int_{\xi}^{\eta}\int_{\beta}^{\xi} Q(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta=-\frac{1}{4}\int_{\eta}^{\xi}\int_{\beta}^{\xi} Q(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta. \tag{IV.22}$$

Интеграл (IV.22) взят по области

$$\xi < \alpha < \beta < \eta,$$

который представляет собой просто треугольник ABC (см. черт. 6), где координаты точки A будут ξ и η.

Иначе

$$v_1 = -\frac{1}{4} \iint\limits_{\Delta ABC} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Заметим теперь, что этот интеграл разбивается на сумму трёх других:

$$v_1 = -\frac{1}{4} \iint\limits_{\Delta CEG} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta - \frac{1}{4} \iint\limits_{\Delta DBF} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta - \\ - \iint\limits_{ADFGE} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

(обозначения понятны сами собой).

Треугольник CEG зависит только от координаты ξ точки A, а треугольник DBF — только от координаты η этой точки. Точка A берётся внутри полуполосы.

Следовательно,

$$-\frac{1}{4} \iint\limits_{\Delta CEG} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = w_1(\xi), \quad -\frac{1}{4} \iint\limits_{\Delta DBF} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = w_2(\eta).$$

Если функция v_1 удовлетворяет уравнению (IV.15), то и функция

$$v = v_1 - w_1(\xi) - w_2(\eta) = -\frac{1}{4} \iint\limits_{ADFGE} Q(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta \qquad \text{(IV.23)}$$

будет удовлетворять тому же уравнению.

Если преобразовать в интеграле (IV.23) переменные, вернувшись к x и t, мы получим:

$$\frac{D(\alpha, \beta)}{D(x, t)} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a,$$

откуда

$$v = -\frac{a}{2} \iint\limits_{ADFGE} p(x, t)\, dx\, dt, \qquad \text{(IV.24)}$$

где $ADFGE$ имеет вид, изображённый на черт. 7.

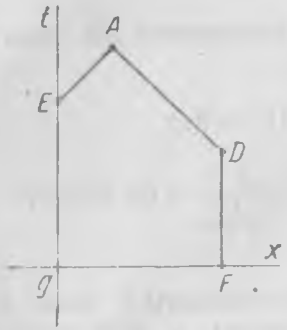
Введём теперь вместо u новую переменную w по формуле

$$w = u - v. \qquad \text{(IV.25)}$$

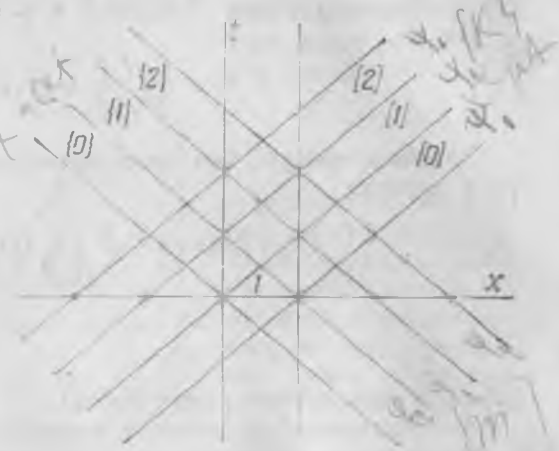
Тогда функция w будет удовлетворять однородному уравнению колебаний струны и условиям того же типа, что (IV.12) и (IV.13).

Рассматривая задачу, мы можем с самого начала считать, что $p(x, t)=0$, а условия (IV.12) и (IV.13) считать уже преобразованными по формуле (IV.25).

Наша замена не нарушает единственности и су-



Черт. 7.



Черт. 8.

ществования решения. Если задача в первоначальной постановке была корректной, то она остаётся такой же и после замены.

Решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{IV.1}$$

можно искать опять в прежней форме:

$$u=\psi_1(x-at)+\psi_2(x+at). \tag{IV.5}$$

Начальные условия (IV.13) позволяют, как и в первой задаче, определить функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ в промежутке

$$0\leqslant x\leqslant l.$$

Функция u определяется при этом в треугольнике лежащем, в полосе и опирающемся на ось абсцисс $(t>0)$ черт. 8.

Посмотрим, можно ли удовлетворить условиям (IV.12), выбирая нужным образом продолжение $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ во всей области, которая нас интересует.

Подстановка уравнения (IV.5) в (IV.12) даёт

$$\left.\begin{aligned}&\alpha\psi_1(-at)+\beta\psi_1'(-at)+\alpha\psi_2(at)+\beta\psi_2'(at)=f_1(t),\\&\gamma\psi_1(l-at)+\delta\psi_1'(l-at)+\gamma\psi_2(l+at)+\delta\psi_2'(l+at)=f_2(t).\end{aligned}\right\} \tag{IV.26}$$

В плоскости (x, t) можно провести два ряда полос, параллельных $x-at=0$ и $x+at=0$, в которых удовлетворяются неравенства

$$-lk < x-at < -l(k-1), \qquad [k]$$
$$ml < x+at < (m+1)l; \qquad \{m\}$$

каждую такую полосу мы будем обозначать номером соответственно в квадратных или фигурных скобках (черт. 8).

Первое условие (IV.26) позволяет определить значение ψ_1 в полосе [m], если известно значение ψ_2 в полосе {m—1}, а второе позволяет определить значение ψ_2 в полосе {k}, если известно ψ_1 в полосе [k—1], при помощи решения обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Для этого достаточно, например, обозначить в первом из уравнений (IV.26) $-at=\xi$, после чего оно получит вид

$$\alpha\psi_1(\xi)+\beta\psi_1'(\xi)=-\alpha\psi_2(-\xi)-\beta\psi_2'(-\xi)+f_1\left(-\frac{\xi}{a}\right), \quad (IV.27)$$

а во втором из уравнений (IV.26) $l-at=\xi$, преобразуя его к виду

$$\gamma\psi_1(\xi)+\delta\psi_1'(\xi)=-\delta\psi_2(2l-\xi)-\delta\psi_2'(2l-\xi)+f_2\left(\frac{l-\xi}{a}\right). \quad (VI.28)$$

Зная ψ_2 в {0} и решая уравнение (IV.27) относительно ψ_1, мы получим значения ψ_1 в [1], а затем, решая (IV.28) относительно ψ_2, мы определим ψ_2 в {2} и т. д. Произвольную постоянную мы определяем из условия непрерывности ψ_1 и ψ_2.

Так же точно, исходя из значений ψ_1 в [0] и решая уравнение (IV.28), получим значения ψ_2 в {1}, а затем, решая (IV.27) относительно ψ_1, мы получим значение ψ_1 в [2] и т. д.

Ясно, что таким образом можно удовлетворить всем поставленным условиям.

При этом не вызывает сомнений ни вопрос о существовании и единственности решения задачи, ни вопрос о её корректности.

Единственное обстоятельство, которое нам нужно будет проверить, заключается в том, что не ясно, будут ли построенные нами функции ψ_1 и ψ_2 допускать непрерывные производные второго порядка.

Мы представим слушателям вывести необходимые и достаточные условия для этого и ограничимся замечанием о том, что, расширяя класс решений уравнения (IV.1), можно отбросить требование непрерывности вторых производных функций ψ_1 и ψ_2.

Уравнение струны и аналогичные ему уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными часто встречаются в разнообразных вопросах математической физики.

ЛЕКЦИЯ V.

ЗАДАЧА ГУРСА. МЕТОД РИМАНА.

§ 1. Задача Гурса.

Для построения решения уравнения колебаний струны мы воспользовались основным свойством характеристик этого уравнения, позволившим сразу проинтегрировать уравнение (IV.3).

Это свойство лежит в основе нескольких важных методов интегрирования уравнений в частных производных гиперболического типа.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a(x,\,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b\,(x,\,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c\,(x,\,y)\,u=F\,(x,\,y); \qquad \text{(V.1)}$$

к такому виду, как мы видели, приводится любое линейное уравнение с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим следующую задачу, которую мы назовём задачей Гурса. *Пусть дано значение u на двух пересекающихся прямых, параллельных координатным осям (т. е. на характеристиках)*:

$$\left.\begin{aligned} u\,|_{x=x_0}&=\varphi_1\,(y); \qquad y_0\leqslant y\leqslant b,\\ u\,|_{y=y_0}&=\varphi_2\,(x); \qquad x_0\leqslant x\leqslant a, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.2)}$$

причём $\varphi_1(y)_0=\varphi_2\,(x_0)$.

Мы докажем, что уравнение (V.1) *имеет в прямоугольнике*

$$x_0\leqslant x\leqslant a,$$
$$y_0\leqslant y\leqslant b$$

определённое решение, удовлетворяющее условиям (V.2).

Положим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=v, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=w. \qquad \text{(V.3)}$$

Уравнение (V.1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial x}=F\,(x,\,y)-a\,(x,\,y)\,v-b\,(x,\,y)\,w-c\,(x,\,y)\,u. \qquad \text{(V.4)}$$

Отсюда сразу очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} v(x, y) &= v(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} [F(x, y) - a(x, y)v - \\ &\qquad - b(x, y)w - c(x, y)u]\, dy, \\ w(x, y) &= w(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} [F(x, y) - a(x, y)v - \\ &\qquad - b(x, y)w - c(x, y)u]\, dx, \\ u(x, y) &= u(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} w(x, y)\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{V.5}$$

Вместо того чтобы решать уравнение (V.1), мы будем решать систему интегральных уравнений (V.5).

Очевидно, что

$$v(x, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=y_0} = \varphi_2'(x),$$

$$w(x_0, y) = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{x=x_0} = \varphi_1'(y).$$

Следовательно, система (V.5) запишется так:

$$\left.\begin{aligned} v(x, y) &= \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^{y} [F(x, y) - a(x, y)v - \\ &\qquad - b(x, y)w - c(x, y)u]\, dy, \\ w(x, y) &= \varphi_1'(y) + \int_{x_0}^{x} [F(x, y) - a(x, y)v - \\ &\qquad - b(x, y)w - c(x, y)u]\, dx, \\ u(x, y) &= \varphi_2(x) + \int_{y_0}^{y} w\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{V.6}$$

Всякое решение системы (V.6) удовлетворяет, очевидно, системе уравнений (V.4) и второму из уравнений (V.3). Кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial w}{\partial x}\, dy = \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^{y} [F(x, y) -$$

$$- a(x, y)v - b(x, y)w - c(x, y)u]\, dy = v.$$

Следовательно, удовлетворяется и первое уравнение (V.3). Далее из (V.6) следует

$$u\big|_{y=y_0}=\varphi_2(x),$$

$$u\Big|_{x=x_0}=\varphi_2(x_0)+\int_{y_0}^{y} w\Big|_{x=x_0}dy=\varphi_2(x_0)+\int_{y_0}^{y}\varphi_1'(y)\,dy=$$
$$=\varphi_2(x_0)+\varphi_1(y)-\varphi_1(y_0)=\varphi_1(y).$$

Следовательно, всякое решение системы (V.6) есть решение поставленной задачи; тем самым система (V.6) полностью эквивалентна уравнению (V.1) при условиях (V.2).

Для того чтобы найти решение системы (V.6), будем действовать *методом последовательных приближений*. Пусть

$$v_0=\varphi_2'(x),\quad w_0=\varphi_1'(y),\quad u_0=\varphi_2(x)$$

и пусть

$$\left.\begin{aligned}
v_n&=\varphi_2'(x)+\int_{y_0}^{y}[F(x,y)-a(x,y)v_{n-1}-\\
&\qquad -b(x,y)w_{n-1}-c(x,y)u_{n-1}]\,dy,\\
w_n&=\varphi_1'(y)+\int_{x_0}^{x}[F(x,y)-a(x,y)v_{n-1}-\\
&\qquad -b(x,y)w_{n-1}-c(x,y)u_{n-1}]\,dx,\\
u_n&=\varphi_2(x)+\int_{y_0}^{y}w_{n-1}\,dy.
\end{aligned}\right\}\tag{V.7}$$

Докажем сходимость последовательностей u_n, v_n и w_n. Для этого мы предположим, что все функции $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_1'(y)$, $\varphi_2'(x)$, $F(x,y)$, $a(x,y)$, $b(x,y)$ и $c(x,y)$ ограничены. Тогда

$$\left.\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n&=-\int_{y_0}^{y}[a(x,y)(v_n-v_{n-1})+\\
&\qquad +b(x,y)(w_n-w_{n-1})+c(x,y)(u_n-u_{n-1})]\,dy,\\
w_{n+1}-w_n&=-\int_{x_0}^{x}[a(x,y)(v_n-v_{n-1})+\\
&\qquad +b(x,y)(w_n-w_{n-1})+c(x,y)(u_n-u_{n-1})]\,dx,\\
u_{n+1}-u_n&=\int_{y_0}^{y}(w_n-w_{n-1})\,dy.
\end{aligned}\right\}\tag{V.8}$$

Пусть $|u_n - u_{n-1}|$, $|v_n - v_{n-1}|$, $|w_n - w_{n-1}|$ удовлетворяют неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} |v_n - v_{n-1}| &\leqslant K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |w_n - w_{n-1}| &\leqslant K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |u_n - u_{n-1}| &\leqslant K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned}\right\} \tag{V.9}$$

где $|a(x, y)| + |b(x, y)| + |c(x, y)| < K$ и A — некоторое постоянное.

При $n = 1$ справедливость (V.9) очевидна.

Покажем, что те же неравенства останутся справедливыми при замене n на $n+1$. Из (V.8) имеем, например:

$$|v_{n+1} - v_n| \leqslant \int_{y_0}^{y} (|a| + |b| + |c|) K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} dy \leqslant$$

$$\leqslant AK^n \int_{y_0}^{y} \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} dy =$$

$$= AK^n \left[\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!} - \frac{(x-x_0)^n}{n!} \right] \leqslant AK^n \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}.$$

Так же оцениваются и остальные разности (V.9).

Из оценки (V.9) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов:

$$u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n-1}), \quad v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - v_{n-1}), \quad w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (w_n - w_{n-1}),$$

члены которых меньше членов ряда

$$A + A \sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1} \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

представляющего, как известно, функцию

$$A + Ae^{K(x+y-x_0-y_0)}.$$

Следовательно, u_n, v_n и w_n стремятся к определённым пределам. Переходя к пределу в формулах (V.7), видим, что предельные функции u, v и w удовлетворяют (V.6), и наша задача решена. Заметим, что мы с тем же успехом могли рассмотреть и случай, когда $x < x_0$, $y < y_0$. Все рассуждения от этого не изменились бы.

§ 2. Сопряжённые дифференциальные операторы.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор 2-го порядка

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu, \qquad (V.10)$$

где A_{ij}, B_i и C являются дважды дифференцируемыми функциями $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Назовём оператор

$$Mv = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 (A_{ij}v)}{\partial x_i\,\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cv \qquad (V.11)$$

сопряжённым с оператором Lu.

Если оператор L совпадает с ему сопряжённым M, то такой оператор называют *самосопряжённым*.

Имеет место формула

$$vLu - uMv = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\,vA\,\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_j}\right] + B_i uv\right\}. \qquad (V.12)$$

Иными словами, выражение $vLu - uMv$ представляет собой сумму частных производных по x_i от некоторых выражений P_i, т. е.

$$vLu - uMv = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial x_i},$$

где

$$P_i = \sum_{j=1}^{n}\left(vA_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_j}\right) + B_i uv. \qquad (V.13)$$

Формула (V.12) проверяется с помощью непосредственного дифференцирования. Мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial x_i} = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} vA_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} vB_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cuv\right] -$$

$$- \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u\,\frac{\partial^2 (A_{ij}v)}{\partial x_j\,\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} u\,\frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cuv\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_j}\right).$$

Последняя сумма обращается в нуль, и мы будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} = vLu - uMv, \tag{V.14}$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь некоторый n-мерный объём Ω, ограниченный кусочно-гладкой поверхностью S[1]).

(В случае, если $n=2$ или 1, слова «объём» и «поверхность» заменяются соответственно словами «область», «линия», «отрезок».)

На основании формулы, аналогичной формуле (I.2), будем иметь

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int (vLu - uMv)\,dx_1\ldots dx_n = \\ = -\int\limits_{S}\cdots\int \sum_{i=1}^{n} P_i \cos(nx_i)\,dS, \tag{V.15}$$

где $\cos(nx_1)$, $\cos(nx_2)$, ... — направляющие косинусы внутренней нормали к S.

Формула (V.15) *носит название формулы Грина.*

Рассмотрим два примера:

Пример 1. *Формула Грина для оператора Лапласа.*

Пусть $Lu = \Delta u$. При этом

$$Mv = \Delta v, \quad P_x = v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad P_y = v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$P_z = v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Формула Грина примет вид

$$\iiint\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\,dx\,dy\,dz = -\iint\limits_{S}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos nx + \right. \\ \left. + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos(ny) + \left(v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos nz\right]dS = \\ = \iint\limits_{S}\left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right)dS, \tag{V.16}$$

где, как обычно, через $\frac{dv}{dn}$ обозначена проекция вектора grad v

---

[1]) Предполагаем, что все условия непрерывности функций и их производных, о которых говорилось при установлении формулы (I.2), выполнены.

с составляющими $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$ на направление внутренней нормали. Формулу (V.16) также называют формулой Грина для оператора Лапласа.

Пример 2. *В качестве второго примера рассмотрим уравнение* (V.1).

Для оператора Lu, стоящего в левой части этого уравнения, сопряжённый оператор Mv и функции P_1 и P_2 будут иметь вид:

$$Mv \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv,$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv,$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv.$$

При этом формула Грина даёт (нормаль внутренняя)

$$\iint\limits_{\Omega} (vLu - uMv)\, dx\, dy = -\int\limits_{S} \left\{\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right] \times \right.$$

$$\left. \times \cos(nx) + \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right] \cos(ny)\right\} dS. \qquad (V.17)$$

§ 3. Метод Римана.

Риманом был предложен важный метод интегрирования уравнения (V.1), основанный на использовании формулы Грина (V.17). Переходим к изложению этого метода.

Считая, что обход области Ω совершается против часовой стрелки, так что обходимая площадь остаётся слева, мы можем заменить формулу (V.17) другой, а именно:

$$\iint\limits_{\Omega} (vLu - uMv)\, dx\, dy = \int\limits_{S} \left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - buv\right] dx -$$

$$- \left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - auv\right] dy. \qquad (V.18)$$

Из чертежа ясно, что при этом

$$dx = \cos(ny)\, dS,$$

$$dy = -\cos(nx)\, dS.$$

Возвращаясь к методу Римана, *займёмся решением задачи Коши для уравнения* (V.1). Пусть нам даны значения u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ на кривой:

$$y=\mu(x),$$

причём предполагается, что

$$\mu'(x)<0, \tag{V.19}$$

$$u\big|_{y=\mu(x)}=\varphi_0(x), \tag{V.20}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=\mu(x)}=\varphi_1(x) \tag{V.21}$$

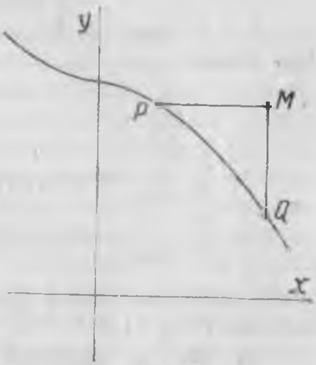
(производная в формуле (V.21) берётся частная, а не вдоль кривой $y=\mu(x)$).

Дифференцируя формулу (V.20), имеем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=\mu(x)}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\mu(x)}\mu'(x)=\varphi_0'(x),$$

откуда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\mu(x)}=\frac{\varphi_0'(x)-\varphi_1(x)}{\mu'(x)}=\varphi_2(x). \tag{V.22}$$



Черт. 9.

Проведём через точку M (черт. 9) с координатами (x_0, y_0) две прямые, параллельные координатным осям до пересечения в точках P и Q с кривой (V.19).

Применим формулу (V.18) к треугольнику MPQ, имеем:

$$\iint_{\Omega}(vLu-uMv)\,dx\,dy=\int_P^Q\left\{\left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-buv\right]dx-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-auv\right]dy\right\}+$$

$$+\int_Q^M\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+auv\right]dy+$$

$$+\int_P^M\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+buv\right]dx. \tag{V.23}$$

Преобразуем два последних интеграла:

$$\int_Q^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+auv\right]dy=\frac{1}{2}uv\Big|_Q^M+\int_Q^M\left(-u\frac{\partial v}{\partial y}+auv\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}uv\Big|_Q^M+\int_Q^M u\left(-\frac{\partial v}{\partial y}+av\right)dy, \qquad (V.24)$$

$$\int_P^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+buv\right]dx=\frac{1}{2}uv\Big|_P^M+\int_P^M u\left(-\frac{\partial v}{\partial x}+bv\right)dx. \qquad (V.25)$$

Эти формулы позволяют легко решить нашу задачу. Пусть $v(x, y, x_0, y_0)$—некоторая функция, удовлетворяющая условиям:

$$Mv=0,$$

$$v\Big|_{x=x_0}=e^{-\int\limits_y^{y_0} a(x_0, y)\,dy}, \qquad v\Big|_{y=y_0}=e^{-\int\limits_x^{x_0} b(x, y_0)\,dx}.$$

При этом

$$v(x_0, y_0, x_0, y_0)=1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{x=x_0}=a(x_0, y)\cdot e^{-\int\limits_y^{y_0} a(x_0, y)\,dy}=a(x_0, y)\,v\Big|_{x=x_0},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{y=y_0}=b(x_0, y)\,v\Big|_{y=y_0}.$$

Существование такой функции v нами уже установлено в начале лекции V (§ 1).

Так как на прямой PM $y=y_0$, а на прямой QM $x=x_0$, то последние члены в формулах (V.24) и (V.25) обращаются в нуль, и мы получим:

$$\left.\begin{aligned}\int_Q^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+auv\right]dy=\frac{1}{2}uv\Big|_Q^M,\\ \int_P^M \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+buv\right]dx=\frac{1}{2}uv\Big|_P^M.\end{aligned}\right\} \qquad (V.26)$$

Вернёмся теперь к формуле (V.23), которая после подстановки в неё (V.26) даёт:

$$\iint_{\text{ш}} vF(x, y)\,dx\,dy=u\Big|_M-\frac{1}{2}(uv)\Big|_P-\frac{1}{2}(uv)\Big|_Q+\Phi, \qquad (V.27)$$

где через Φ обозначено первое слагаемое формулы (V.23), которое всё целиком выражается через v и известные функции, ибо на этой кривой в силу (V.19), (V.20), (V.21) и (V.22) известны u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

При этом (V.27) даёт так называемую *формулу Римана*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(uv)\Big|_P + \frac{1}{2}(uv)\Big|_Q - \Phi + \iint_\Omega vF(x, y)\,dx\,dy. \qquad \text{(V.28)}$$

Как мы видим, формула (V.28) позволяет в явном виде написать решение интересующей нас задачи, так как x_0, y_0 — произвольная точка.

Функция $u(x_0, y_0)$, определённая по формуле (V.28), будет удовлетворять уравнению и условиям (V.20) и (V.21), чего мы сейчас проверять не будем.

§ 4. Некоторые качественные следствия формулы Римана.

Из формулы Римана вытекает несколько следствий, имеющих общий интерес. Остановимся на них несколько подробнее.

Будем изучать поведение решения задачи Коши для уравнения (V.1) в зависимости от изменения начальных условий. Легко видеть, что значение этого решения в некоторой точке (x_0, y_0) вовсе не зависит от данных Коши вне криволинейного треугольника MPQ, образованного двумя характеристиками, проведёнными через эту точку, и кривой, несущей начальные данные. Если мы будем менять данные вне этого треугольника, то решение будет меняться лишь вне этого треугольника. Таким образом, каждая характеристика будет отделять область, где решение осталось неизменным, от той области, где мы его изменили. Мы приходим к следующему выводу: *К данному решению задачи, зафиксированному внутри треугольника MPQ, можно присоединять вдоль характеристики, вообще говоря, различные решения, являющиеся его продолжением.*

Возможность выкраивать по характеристикам разные области, в которых решение может быть заменяемо, есть одно из важных свойств характеристик вообще.

ЛЕКЦИЯ VI.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

§ 1. Замкнутые множества и области.

Нам придётся часто сталкиваться с некоторыми вопросами анализа, относящимися к теории кратных интегралов. В целях полноты изложения повторим, несколько углубив, все необходимые нам результаты и уточним те понятия, с которыми мы будем иметь дело.

Рассмотрим n-мерное пространство с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Под областью в этом пространстве мы будем понимать такое множество точек, которое обладает тем свойством, что каждая его точка является внутренней, т. е. может быть окружена шаром с центром в этой точке, целиком лежащим внутри области.

Такое общее определение не предполагает область обязательно связной. Она может состоять из отдельных кусков в конечном или даже бесконечном числе.

Иногда области называют открытыми множествами.

Пример 1. Множество всех точек некоторого прямоугольного параллелепипеда, определённых неравенствами

$$0 < x_i < a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

образует область. (Знак $<$ нельзя заменить на $\leqslant$. Параллелепипед с границей не есть область.)

Пример 2. Множество всех внутренних точек некоторого шара $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 < R^2$ составляет область.

Если исключить из него начало координат, рассмотрев только точки, для которых

$$0 < \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < R^2,$$

то мы опять получим область.

Будем называть суммой нескольких множеств, или их объединением, новое множество, составленное из всех точек, принадлежащих хотя бы одному из них. Сумму E множеств E_1 и E_2 будем обозначать $E_1 + E_2$ и записывать $E = E_1 + E_2$.

Сумма конечного или бесконечного числа областей составляет область.

В самом деле, каждая точка такой суммы является внутренней, по крайней мере, для одной из областей и, следовательно, будет внутренней точкой для суммы.

Кроме областей, большую роль играют ещё *замкнутые множества, т. е. такие множества, которые содержат все свои предельные точки.*

Приведём примеры таких множеств.

Пример 3. Множество всех точек шара

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant R^2$$

есть замкнутое множество (знак $\leqslant$ нельзя заменить на знак $<$).

Пример 4. Множество всех точек некоторого параллелепипеда $0 \leqslant x_i \leqslant a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть замкнутое множество.

Пример 5. Изолированная точка $x_i = a_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$ представляет собой замкнутое множество.

Сумма конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество. (Для бесконечного числа это уже не так.)

Условимся множество, не содержащее ни одной точки, называть пустым множеством. Пустое множество будем считать одновременно и областью и замкнутым.

Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ — некоторые множества в конечном или бесконечном числе. Будем называть *их пересечением множество E всех точек, которые принадлежат всем этим множествам одновременно*; иногда это пересечение может быть пустым. Будем обозначать пересечение E множеств $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ так:

$$E = E_1 E_2 E_3 \ldots E_k \ldots$$

Пересечение конечного или бесконечного числа замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots$,

$$F = F_1 F_2 \ldots F_k \ldots$$

есть замкнутое множество. В самом деле, предельная точка такого множества является предельной точкой каждого из $F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots$ и, следовательно, принадлежит им всем и должна содержаться в F.

Полезно заметить, что пересечение *конечного* числа областей

$$\Omega = \Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_k$$

представляет собой область.

В самом деле любая точка Ω есть внутренняя точка областей $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ и в каждой из них является центром некоторого внутреннего шара.

Наименьший из этих шаров будет внутренним шаром в Ω.

Пусть E_1 и E_2 — два множества. Удалим из E_1 все точки, принадлежащие их пересечению E_1E_2. Оставшееся множество E_3 мы будем называть разностью и обозначать $E_3 = E_1 - E_2$.

С помощью разности мы можем построить ещё несколько примеров замкнутых множеств и областей.

Пусть Ω — область, а F — замкнутое множество.

$$\Omega - F = \Omega_0 \text{ есть область.}$$

В самом деле, если бы внутри Ω_0 была точка, не окружённая внутренним шариком, то в любой её окрестности находились бы точки, выброшенные из Ω, т. е. принадлежащие F. Будучи, таким образом, предельной точкой для точек F, сама она должна была бы принадлежать F и, следовательно, не могла бы принадлежать $\Omega - F$. Следовательно, таких точек в Ω_0 нет, и Ω_0 является областью.

Далее $F - \Omega = F_0$ есть замкнутое множество.

Любая точка, предельная для F_0, являясь точкой F, могла бы быть выброшена из него лишь в том случае, если бы она принадлежала Ω. Но точки Ω не могут быть предельными для F_0, ибо они окружены шариками, не содержащими точек F_0. Значит, F_0 замкнуто.

Граница C области Ω, т. е. множество предельных точек этой области, не являющихся внутренними точками, представляет собою замкнутое множество. Рассмотрим какую-нибудь точку P_0, являющуюся пределом последовательности

$$P_1,\ P_2 \ldots,\ P_k, \ldots$$

точек из C. В силу того, что P_k принадлежит C, на расстоянии, меньшем чем $\frac{1}{2^k}$ от неё, будет находиться точка Q_k из Ω. При этом последовательность

$$Q_1,\ Q_2, \ldots,\ Q_k, \ldots$$

будет сходиться опять к P_0. Значит, P_0 есть предельная точка для Ω и, следовательно, принадлежит C. Итак, все предельные точки C принадлежат C, что и требовалось доказать.

Пример 6. Если мы условимся записывать любую конечную десятичную дробь, оканчивающуюся пятёркой, с помощью бесконечного ряда девяток, например $0{,}5 = 0{,}499\ldots$, то *множество всех точек отрезка $[0, 1]$, десятичные разложения координат которых не содержат цифры 5, есть замкнутое множество.*

Этот пример даёт нам так называемое нигде не плотное замкнутое множество, для которого в любом интервале $\alpha < x < \beta$ лежит другой интервал, не содержащий точек нашего множества.

Если все точки некоторого множества E_1 принадлежат E_2, то мы будем говорить, что E_1 заключено в E_2 или содержится в E_2. Это свойство мы будем выражать символом $E_1 \subseteq E_2$.

Пусть

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_k + \ldots$$

есть сумма конечного или бесконечного числа областей. Функция f, непрерывная в каждой из Ω_k, будет непрерывна и в Ω.

В самом деле, любая точка Ω вместе с окрестностью лежит внутри одного из Ω_k и является точкой непрерывности f, что и требовалось доказать.

§ 2. Интегралы по области от непрерывных функций.

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана в некоторой области Ω, *неотрицательна и непрерывна в ней.* (Разумеется, она может быть и не ограничена и неравномерно непрерывна, как, например, функция $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}$ в области $0 < r < 1$, полученной удалением начала координат из шара $0 \leqslant r < 1$.)

Разделим всё пространство на кубические ячейки $F_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ со стороной h, определённые неравенствами

$$k_i h \leqslant x_i \leqslant (k_i + 1)\, h, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где k_i — целые числа. Такое подразделение назовём сеткой.

Составим теперь из конечного числа кубиков сетки какой-либо многогранник Φ_h, лежащий целиком внутри Ω. Такой многогранник мы назовем внутренним сеточным многогранником. Будем уменьшать h, подразделяя каждый кубик сетки на целое число более мелких кубиков, и снова строить внутренние сеточные многогранники. *Систему внутренних се-*

точных многогранников мы назовём исчерпывающей, если выполнены два условия.

а) Последовательность Φ_h расширяется, т. е.

$$\Phi_{h_1} \subseteq \Phi_{h_2} \subseteq \Phi_{h_3} \subseteq \ldots \subseteq \Phi_{h_k} \subseteq \ldots$$

б) Каждая точка области Ω попадает *строго* внутрь всех многогранников Φ_h, начиная с некоторого.

Составим интегралы:

$$\int_{\Phi_h} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

где Φ_h — исчерпывающая система многогранников.

Если при $h \to 0$ эти интегралы остаются ограниченными, то, очевидно, они стремятся к некоторому пределу. Этот предел мы назовём интегралом от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по области Ω:

$$\int_{\Omega} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \lim_{k\to\infty} \int_{\Phi_{h_k}} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Этот предел, как мы докажем, не может зависеть от того, каким способом выбрана исчерпывающая система и как расположены координатные оси в пространстве.

Интеграл

$$\int_{\Omega} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

будем более коротко записывать $\int_{\Omega} f\, dv$ или $\int_{\Omega} f\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$.

Лемма 1. Рассмотрим систему расширяющихся областей

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \ldots \subseteq \Omega_k \subseteq \ldots,$$

и пусть $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \ldots$ Тогда любое ограниченное замкнутое множество F, лежащее целиком внутри Ω, попадёт внутрь всех Ω_k, начиная с некоторого k.

В самом деле, пусть это не так. Тогда можно для каждого k указать точку P_k, принадлежащую F, но не принадлежащую Ω_k. Мы составим, таким образом, последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ Очевидно, что все точки $P_k, P_{k+1}, \ldots$ лежат вне Ω_k. Множество всех P_k имеет хотя бы одну предельную точку P_0, которая должна принадлежать F и, следовательно, лежит внутри Ω, но не принадлежит ни к одному Ω_k, чего быть не может, ибо Ω является суммой Ω_k. Лемма доказана.

Покажем теперь, что интеграл по области не зависит ни от того, как повёрнуты координатные оси в пространстве, ни от того, каким способом составлены исчерпывающие многогранники.

Рассмотрим области Ω_k, состоящие из всех внутренних точек Φ_{h_k}. Сумма этих областей есть область Ω и, значит, любое замкнутое множество F, лежащее внутри Ω, попадёт внутрь всех многогранников Φ_{h_k}, начиная с некоторого k. Пусть Φ_{h_k} и Ψ_{h_k} — две системы исчерпывающих многогранников. (Не обязательно в одной системе координат.)

Некоторый Φ_{h_k} будет лежать внутри соответственно выбранного Ψ_{hk_1}, а этот последний внутри некоторого Φ_{hk_2}, значит,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Phi_{h_k}} f\,dv \leqslant \lim_{k_1\to\infty} \int\limits_{\Psi_{hk_1}} f\,dv \leqslant \lim_{k_2\to\infty} \int\limits_{\Phi_{hk_2}} f\,dv,$$

откуда видно, что все три предела равны между собой. Наше утверждение доказано.

Замечание 1. Функция f, неотрицательная, ограниченная и непрерывная в ограниченной области Ω, интегрируема в этой области.

В самом деле, интегралы по исчерпывающей системе многогранников образуют при этом возрастающую ограниченную последовательность и, следовательно, стремятся к определённому пределу, что и требовалось доказать.

Очевидно, что каждая неотрицательная функция, интегрируемая в области Ω, будет интегрируема в любой её подобласти Ω_1. В самом деле, интегралы по исчерпывающей системе многогранников для Ω_1 будут при этом ограничены и предел их существует.

Замечание 2. Если f_1 и f_2 — какие-либо две неотрицательные функции, непрерывные и интегрируемые в Ω, то и сумма их f_1+f_2 интегрируема в Ω, причём

$$\int\limits_{\Omega} (f_1+f_2)\,dv = \int\limits_{\Omega} f_1\,dv + \int\limits_{\Omega} f_2\,dv;$$

Доказательство этого утверждения не представляет труда. Оно получается предельным переходом из очевидного равенства

$$\int\limits_{\Phi_h} (f_1+f_2)\,dv = \int\limits_{\Phi_h} f_1\,dv + \int\limits_{\Phi_h} f_2\,dv;$$

Замечание 3. Если f_1 неотрицательна, непрерывна и интегрируема в Ω, то и af_1 при $a\geqslant 0$ обладает этими свойствами, причём

$$\int\limits_{\Omega} af_1\,dv = a\int\limits_{\Omega} f_1\,dv.$$

Доказательство этого утверждения также не представляет труда.

После этих замечаний мы можем построить понятие интеграла для функции любого знака.

Пусть f — какая-либо непрерывная функция в области Ω и пусть нам удалось каким-либо способом представить её в виде

$$f = f_1 - f_2,$$

где f_1 и f_2 суть неотрицательные функции.

Если при этом каждая из f_1 и f_2 будет интегрируема в Ω, то мы можем положить по определению

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv = \int\limits_{\Omega} f_1\,dv - \int\limits_{\Omega} f_2\,dv.$$

Покажем, что такое определение позволяет определить интеграл от f по области Ω единственным образом. В самом деле, пусть

$$f=f_1-f_2 \quad \text{и} \quad f=f_3-f_4$$

— два каких-либо представления для функции f.

В силу замечания 1 существует интеграл от функции $f_1+f_4=f_2+f_3$, т. е.

$$\int\limits_\Omega (f_1+f_4)\,dv=\int\limits_\Omega (f_2+f_3)\,dv.$$

При этом из равенств

$$\int\limits_\Omega (f_1+f_4)\,dv=\int\limits_\Omega f_1\,dv+\int\limits_\Omega f_4\,dv \quad \text{и} \quad \int\limits_\Omega (f_2+f_3)\,dv=\int\limits_\Omega f_2\,dv+\int\limits_\Omega f_3\,dv$$

следует

$$\int\limits_\Omega f_1\,dv-\int\limits_\Omega f_2\,dv=\int\limits_\Omega f_3\,dv-\int\limits_\Omega f_4\,dv,$$

что и требовалось доказать. Установим ещё одну важную формулу.

Замечание 4. Если $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — непрерывные функции, интегрируемые в Ω, то и функция

$$f_0=a_1f_1+a_2f_2+\ldots+a_kf_k$$

интегрируема в Ω, причём

$$\int\limits_\Omega (a_1f_1+a_2f_2+\ldots+a_kf_k)\,dv=a_1\int\limits_\Omega f_1\,dv+a_2\int\limits_\Omega f_2\,dv+\ldots+a_k\int\limits_\Omega f_k\,dv.$$

Для доказательства достаточно представить каждую функцию f_s, $s=1, 2, \ldots, k$ в виде разности двух интегрируемых функций:

$$f_s=f_s^{(1)}-f_s^{(2)}.$$

Подставляя это выражение в левую часть и считая для простоты все a_s положительными, получим:

$$\int\limits_\Omega (a_1f_1+a_2f_2+\ldots+a_kf_k)\,dv=\int\limits_\Omega (a_1f_1^{(1)}+a_2f_2^{(1)}+\ldots+a_kf_k^{(1)})\,dv-$$
$$-\int\limits_\Omega (a_1f_1^{(2)}+a_2f_2^{(2)}+\ldots+a_kf_k^{(2)})\,dv.$$

Пользуясь замечанием 1 и группируя иначе слагаемые, легко докажем наше утверждение.

Теорема 1. Пусть Ω_1 и Ω_2 — две области, которые могут пересекаться друг с другом, и пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция в области $\Omega_1+\Omega_2$, интегрируемая в ней.

Тогда справедливо соотношение

$$\int\limits_{\Omega_1} f\,dv+\int\limits_{\Omega_2} f\,dv=\int\limits_{\Omega_1+\Omega_2} f\,dv+\int\limits_{\Omega_1\Omega_2} f\,dv. \tag{VI.1}$$

Для доказательства ограничимся случаем $f \geqslant 0$. Построим в Ω_1 и Ω_2 исчерпывающие сеточные многогранники $\Phi_h^{(1)}$ и $\Phi_h^{(2)}$. Очевидно,

$$\int\limits_{\Phi_h^{(1)}} f\,dv + \int\limits_{\Phi_h^{(2)}} f\,dv = \int\limits_{\Phi_h^{(1)}+\Phi_h^{(2)}} f\,dv + \int\limits_{\Phi_h^{(1)}\Phi_h^{(2)}} f\,dv. \tag{VI.2}$$

Легко видеть, что многогранники $\Phi_h^{(1)}+\Phi_h^{(2)}$ образуют исчерпывающую систему для $\Omega_1+\Omega_2$, ибо каждая точка этой области попадёт рано или поздно в один из $\Phi_h^{(1)}$ или $\Phi_h^{(2)}$, а $\Phi_h^{(1)}\Phi_h^{(2)}$ образуют исчерпывающую систему для $\Omega_1\Omega_2$, ибо каждая точка этой области рано или поздно попадёт в оба многогранника $\Phi_h^{(1)}$ и $\Phi_h^{(2)}$. Поэтому, переходя к пределу в (VI.2), получим (VI.1). Теорема доказана.

Следствие. Интеграл по сумме конечного числа областей $\Omega_0 = \Omega_1+\Omega_2+\ldots+\Omega_k$ от неотрицательной функции не превосходит суммы интегралов по этим областям:

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv \leqslant \int\limits_{\Omega_1} f\,dv + \ldots + \int\limits_{\Omega_k} f\,dv.$$

Полезно заметить, что если все интегралы по областям Ω_k существуют, то и интеграл по Ω существует.

§ 3. Интегралы по замкнутому множеству от непрерывных функций.

Мы перейдём сейчас к определению важнейшего понятия об интеграле от непрерывной функции по ограниченному замкнутому множеству.

Естественно сделать это следующим образом.

Пусть функция f определена на некотором ограниченном замкнутом множестве F и непрерывна на нём. Заключим F в некоторую область Ω, и пусть нам удалось непрерывным образом продолжить функцию f на область Ω, и f оказалась интегрируема в этой области.

Составим ещё область $\Omega - F$. Тогда, по определению,

$$\int\limits_{F} f\,dv = \int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{\Omega-F} f\,dv.$$

Однако в таком определении остаётся много недоказанного. Неясно, во-первых, всегда ли можно так поступить, а, во-вторых, приводит ли подобное определение интеграла к однозначному результату.

Докажем несколько вспомогательных теорем.

Пусть f — какая-нибудь неотрицательная функция, непрерывная в Ω. Далее, пусть Ω_1 содержится в Ω, а F — замкнутое множество, заключённое в Ω_1. Мы будем иметь:

$$\Omega_1 + (\Omega - F) = \Omega; \quad \Omega_1(\Omega - F) = \Omega_1 - F.$$

Отсюда, на основании теоремы 1 (VI),

$$\int\limits_{\Omega_1} f\,dv + \int\limits_{\Omega-F} f\,dv = \int\limits_{\Omega} f\,dv + \int\limits_{\Omega_1-F} f\,dv$$

и, значит,

$$\int_{\Omega} f\,dv - \int_{\Omega-F} f\,dv = \int_{\Omega_1} f\,dv - \int_{\Omega_1-F} f\,dv.$$

Пусть f непрерывна в области Ω_1 и в области Ω_2 и интегрируема в каждой из них, а $F \subset \Omega_1 \cdot \Omega_2$.

Положим $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$.

По доказанному,

$$\int_{\Omega} f\,dv - \int_{\Omega-F} f\,dv = \int_{\Omega_1} f\,dv - \int_{\Omega_1-F} f\,dv = \int_{\Omega_2} f\,dv - \int_{\Omega_2-F} f\,dv.$$

Мы получили важный результат:

Разность

$$\int_{\Omega} f\,dv - \int_{\Omega-F} f\,dv$$

не зависит от области Ω.

Лемма 2. Пусть непрерывная функция f обращается в нуль в точках некоторого замкнутого множества F внутри Ω; тогда

$$\int_{\Omega} f\,dv = \int_{\Omega-F} f\,dv.$$

Предположим сначала, что Ω ограничена и $f \geqslant 0$.

Очевидно, что

$$\int_{\Omega-F} f\,dv \leqslant \int_{\Omega} f\,dv,$$

так как исчерпывающие многогранники для $\Omega-F$ лежат внутри исчерпывающих многогранников для Ω. Рассмотрим область Ω_ε, в которой $f < \varepsilon$. Легко видеть, что

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f\,dv < \delta(\varepsilon), \quad \text{где} \quad \delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon}{\longrightarrow} 0.$$

На основании следствия из теоремы 1 (VI.)

$$\int_{\Omega} f\,dv \leqslant \int_{\Omega-F} f\,dv + \int_{\Omega_\varepsilon} f\,dv$$

и, значит,

$$\int_{\Omega-F} f\,dv \geqslant \int_{\Omega} f\,dv - \delta(\varepsilon),$$

откуда и следует наша лемма.

В общем случае представим Ω как сумму расширяющихся и ограниченных областей Ω_k. Переходя к пределу в равенстве

$$\int_{\Omega_k} f\,dv = \int_{\Omega_k-F} f\,dv$$

получим наше утверждение.

Случай, когда f имеет любой знак, также легко привести к рассмотренному.

Если две функции f_1 и f_2 совпадают во всех точках F, то для них имеет место равенство:

$$\int_{\Omega} f_1\,dv - \int_{\Omega - F} f_1\,dv = \int_{\Omega} f_2\,dv - \int_{\Omega - F} f_2\,dv.$$

В самом деле, при этом

$$\int_{\Omega} (f_1 - f_2)\,dv = \int_{\Omega - F} (f_1 - f_2)\,dv,$$

что и доказывает наше равенство.

Лемма 3. Рассмотрим ограниченную область Ω с границей C. Пусть F — замкнутое множество, лежащее в $\Omega + C$. Пусть на F задана некоторая непрерывная неотрицательная функция φ. Тогда можно построить в $\Omega + C$ такую непрерывную неотрицательную функцию f, которая равна φ в точках F.

Каждая точка P области Ω находится на конечном расстоянии $\delta(P)$ от множества F. Построим в данной точке P шар радиуса R и рассмотрим $\max\limits_{r \leq R} \varphi$ в этом шаре.

Пусть

$$\max_{r \leq R} \varphi = M_P(R).$$

Если точек F внутри этого шара нет, то будем считать $M_P(R) = 0$. $M_P(R)$ — монотонно возрастающая и, следовательно, интегрируемая в обычном смысле слова функция [1]).

За функцию f можно взять, например

$$f(P) = \frac{1}{\delta(P)} \int_{\delta(P)}^{2\delta(P)} M_P(R)\,dR.$$

Докажем, что при таком определении $f(P)$ будет непрерывной. В самом деле, в точке P_1, отстоящей на расстоянии δ от точки P_0 множества F, значение этой функции заключено между

$$\min_{r \leq 3\delta} \varphi(P) \quad \text{и} \quad \max_{r \leq 3\delta} \varphi(P),$$

причём шар радиуса 3δ берётся с центром в точке P_0 и, следовательно, стремится к $\varphi(P_0)$ при $\delta \to 0$ в силу непрерывности φ.

Для двух точек P_1 и P_2, не являющихся точками F, отстоящих одна от другой на величину h, имеем

$$M_{P_1}(R) \leq M_{P_2}(R + h) \quad \text{и} \quad \delta(P_1) \leq \delta(P_2) + h,$$
$$M_{P_2}(R) \leq M_{P_1}(R + h) \quad \text{и} \quad \delta(P_2) \leq \delta(P_1) + h.$$

---

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. I.

Будем считать $h < \min\left\{\frac{\delta(P_1)}{3};\ \frac{\delta(P_2)}{3}\right\}$; тогда

$$f(P_1)-f(P_2)=\frac{1}{\delta(P_1)}\int\limits_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR-\frac{1}{\delta(P_2)}\int\limits_{\delta(P_2)}^{2\delta(P_2)} M_{P_2}(R)\,dR\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\delta(P_1)}\int\limits_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR-\frac{1}{\delta(P_1)+h}\int\limits_{\delta(P_1)+h}^{2\delta(P_1)-2h} M_{P_1}(R-h)\,dR=$$

$$=\frac{1}{\delta(P_1)}\int\limits_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)-3h} M_{P_1}(R)\,dR+\frac{1}{\delta(P_1)}\int\limits_{2\delta(P_1)-3h}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR-$$

$$-\frac{1}{\delta(P_1)+h}\int\limits_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)-3h} M_{P_1}(y)\,dy=\frac{h}{\delta(P_1)\,[\delta(P_1)+h]}\int\limits_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)-3h} M_{P_1}(R)\,dR+$$

$$+\frac{1}{\delta(P_1)}\int\limits_{2\delta(P_1)-3h}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR\leqslant\frac{h}{[\delta(P_1)]^2}\int\limits_{\delta(P_1)}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR+$$

$$+\frac{1}{\delta(P_1)}\int\limits_{2\delta(P_1)-3h}^{2\delta(P_1)} M_{P_1}(R)\,dR\leqslant\frac{4hM}{\delta(P_1)},$$

где $M=\max\varphi\geqslant M_P(R)$.

При достаточно малом h эта величина сколь угодно мала и, значит, $f(P_1)-f(P_2)<\varepsilon$. Но точки P_1 и P_2 равноправны, поэтому справедливо также неравенство $f(P_2)-f(P_1)<\varepsilon$. Отсюда следует непрерывность $f(P)$, и лемма доказана.

Полезно отметить, что если в точках F справедливы неравенства

$$m\leqslant f\leqslant M,$$

то эти же неравенства сохраняются и на всей области Ω, как это вытекает из применения теоремы о среднем к интегралу, выражающему f.

Понятие интеграла по замкнутому множеству нами, таким образом, обосновано.

Мы доказали одновременно, что всякая неотрицательная функция f, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве F, интегрируема на этом множестве. В самом деле, если воспользоваться ограниченностью f, которая устанавливается так же, как в известной теореме Вейерштрасса, то прямое применение леммы 3 (VI) устанавливает и интегрируемость f. Для таких замкнутых множеств, как параллелепипеды или сеточные многогранники, наше определение, очевидно, полностью совпадает со старым.

Справедлива теорема.

Теорема 2. Пусть F_1 и F_2 — два ограниченных замкнутых множества и f — неотрицательная непрерывная на каждом из них функция. Тогда

$$\int\limits_{F_1} f\,dv+\int\limits_{F_2} f\,dv=\int\limits_{F_1+F_2} f\,dv+\int\limits_{F_1\cdot F_2} f\,dv.$$

Эта теорема легко сводится к теореме 1 (VI), если заключить F_1+E_2 в область Ω и обозначить $\Omega-F_1=\Omega_1$, $\Omega-F_2=\Omega_2$.

Принимая во внимание, что

$$\Omega_1+\Omega_2=\Omega-F_1F_2,$$
$$\Omega_1\Omega_2==\Omega-(F_1+F_2),$$

получим

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{F_1} f\,dv=\int\limits_{\Omega} f\,dv-\int\limits_{\Omega_1} f\,dv; \qquad \int\limits_{F_2} f\,dv=\int\limits_{\Omega} f\,dv-\int\limits_{\Omega_2} f\,dv;\\ &\int\limits_{F_1+F_2} f\,dv=\int\limits_{\Omega} f\,dv-\int\limits_{\Omega_1\Omega_2} f\,dv; \quad \int\limits_{F_1F_2} f\,dv=\int\limits_{\Omega} f\,dv-\int\limits_{\Omega_1+\Omega_2} f\,dv.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.3)}$$

Из формул (VI.1) и (VI.3) и следует наша теорема.

Теорема 3. Пусть дана последовательность областей $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ $\ldots, \Omega_k, \ldots$, содержащихся одна в другой:

$$\Omega_1\subseteq\Omega_2\subseteq\Omega_3\subset\ldots\subseteq\Omega_k\subseteq\ldots$$

Обозначим через Ω_0 их сумму

$$\Omega_0=\Omega_1+\Omega_2+\ldots+\Omega_k+\ldots;$$

и пусть f — какая-либо неотрицательная, непрерывная и интегрируемая функция в Ω_0.

Тогда

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,dv=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega_k} f\,dv.$$

Построим систему исчерпывающих сеточных многогранников Φ_h для области Ω_0.

На основании леммы 1 (VI) каждый такой многогранник будет лежать целиком внутри какой-либо области Ω_k.

Мы будем иметь, следовательно,

$$\int\limits_{\Phi_h} f\,dv\leqslant\int\limits_{\Omega_k} f\,dv\leqslant\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega_k} f\,dv$$

и, значит, переходя к пределу при $h\to 0$,

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,dv\leqslant\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega_k} f\,dv.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,dv\geqslant\int\limits_{\Omega_k} f\,dv,$$

т. е.

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,dv\geqslant\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega_k} f\,dv.$$

Теорема доказана.

Следствие. Интеграл по сумме бесконечной последовательности областей $\Omega_0=\Omega_1+\Omega_2+\ldots+\Omega_k+\ldots$ от неотрицательной, непрерывной функции не превосходит суммы интегралов по этим областям. В самом деле:

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,dv = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_1+\ldots+\Omega_k} f\,dv \leqslant \lim_{k\to\infty}\left[\int\limits_{\Omega_1} f\,dv + \ldots + \int\limits_{\Omega_k} f\,dv\right],$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_k$ — последовательность ограниченных замкнутых множеств, содержащих одно другое:

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots \supseteq F_k \supseteq \ldots$$

Обозначим их пересечение через F_0; $F_0 = F_1 F_2 F_3 \ldots F_k \ldots$ (F_0 не может быть пустым, если F_1 ограничено, ибо множество $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$, содержащее по одной точке из каждого F_k, будет иметь хоть одну предельную точку, общую всем F_k и, следовательно, входящую в F_0) и пусть f — некоторая неотрицательная, непрерывная функция на F_1. Тогда

$$\int\limits_{F_0} f\,dv = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{F_k} f\,dv.$$

Теорема сводится к предыдущей, если продолжить f на область Ω, содержащую F_k, и положить $\Omega - F_k = \Omega_k$.

Тогда, если $\Omega_0 = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_k + \ldots$, мы будем иметь:

$$\Omega - \Omega_0 = F_0,$$

$$\int\limits_{F_k} f\,dv = \int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{\Omega_k} f\,dv, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Пользуясь предыдущей теоремой и переходя к пределу, докажем наше предложение.

Важнейшей теоремой в этом разделе является следующая.

Теорема 5. Пусть дана последовательность областей $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \ldots$, содержащих одна другую:

$$\Omega_1 \supseteq \Omega_2 \supseteq \Omega_3 \supseteq \ldots \supseteq \Omega_k \supseteq \ldots$$

и пусть пересечение их также представляет собой область (или пусто)

$$\Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_k \ldots = \Omega_0.$$

Пусть f — функция непрерывная, неотрицательная и интегрируемая на Ω_1.

Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega_k} f\,dv = \int\limits_{\Omega_0} f\,dv$$

(или равен нулю, если Ω_0 — пустое множество).

Приведём каждой области Ω_k в соответствие некоторый сеточный многогранник $\Phi_h^{(k)} \subset \Omega_k$ так, чтобы иметь

$$\int\limits_{\Omega_k - \Phi_h^{(k)}} f\,dv < \frac{\varepsilon}{2^k},$$

и составим области $\Omega_k^* = \Omega_k - \Phi_h^{(k+1)}$.

Нетрудно видеть, что область Ω_1 совпадает с суммой

$$\Omega_1 = \Omega_0 + \Omega_1' + \ldots + \Omega_k' + \ldots$$

На основании следствия из теоремы 3 (VI)

$$\int\limits_{\Omega_1} f\,dv \leqslant \int\limits_{\Omega_0} f\,dv + \int\limits_{\Omega_1'} f\,dv + \ldots + \int\limits_{\Omega_k'} f\,dv + \ldots$$

Но

$$\int\limits_{\Omega_k'} f\,dv = \int\limits_{\Omega_k} f\,dv - \int\limits_{\Phi_h^{(k+1)}} f\,dv \leqslant \int\limits_{\Omega_k} f\,dv - \int\limits_{\Omega_{k+1}} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

и, значит,

$$\int\limits_{\Omega_1} f\,dv \leqslant \int\limits_{\Omega_0} f\,dv + \left(\int\limits_{\Omega_1} f\,dv - \int\limits_{\Omega_2} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2^2}\right) + \left(\int\limits_{\Omega_2} f\,dv - \int\limits_{\Omega_3} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2^3}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\int\limits_{\Omega_k} f\,dv - \int\limits_{\Omega_{k+1}} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) + \ldots = \int\limits_{\Omega_0} f\,dv + \lim_{k\to\infty}\left(\int\limits_{\Omega_1} f\,dv - \int\limits_{\Omega_k} f\,dv\right) + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f\,dv \leqslant \int\limits_{\Omega_0} f\,dv + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теорема следует из того, что $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f\,dv \geqslant \int\limits_{\Omega_0} f\,dv.$

Следствие. Если пересечение последовательности областей Ω_1, $\Omega_2, \ldots, \Omega_k, \ldots$, вложенных друг в друга:

$$\Omega_1 \supseteq \Omega_2 \supseteq \ldots \supseteq \Omega_k \supseteq \ldots,$$

есть замкнутое множество F;

$$F = \Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_k \ldots,$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f\,dv = \int\limits_{F} f\,dv.$$

В самом деле, пусть

$$\Omega_k - F = \Omega_k',$$

$$\int\limits_{F} f\,dv = \int\limits_{\Omega_k} f\,dv - \int\limits_{\Omega_k'} f\,dv.$$

Переходя к пределу в обеих частях и замечая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k'} f\,dv = 0$, ибо пересечение Ω_k' пусто, получим $\int\limits_{F} f\,dv = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} f\,dv$, что и требовалось доказать.

Теорема 6. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots$ — последовательность расширяющихся замкнутых множеств

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \ldots \subseteq F_k \subseteq \ldots$$

и пусть их сумма E ограничена и является замкнутым множеством или областью $E = F_1 + F_2 + \ldots + F_k + \ldots$ Пусть f — неотрицательна, непрерывна на F_k и E, интегрируема на E, если E — область. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \int_{F_k} f\,dv = \int_E f\,dv.$$

Теорема сводится к предыдущей, если перейти к рассмотрению областей $\Omega - F_k = \Omega_k$.

Рассмотрим теперь частный случай $f = 1$.

Будем называть интегралы

$$\int_\Omega dv \quad \text{и} \quad \int_F dv$$

соответственно мерой области Ω или замкнутого множества F. Меру области Ω или множества F мы будем обозначать

$$m\Omega \quad \text{или} \quad mF.$$

Все доказанные нами выше теоремы об интегралах, будучи применены к случаю $f = 1$, дают нам сразу аналогичные теоремы для меры областей или замкнутых множеств.

Мера является естественным обобщением объёма.

При её помощи легко сформулировать важную для применения теорему.

Теорема 7. О среднем значении.

Пусть E обозначает замкнутое множество или область, на котором функция f непрерывна, и пусть

$$M_1 \leqslant f \leqslant M_2$$

везде на E.

Тогда

$$M_1 mE \leqslant \int_E f\,dv \leqslant M_2 mE.$$

Доказательство этой теоремы совершенно очевидно: оно следует из того, что

$$\int_E (f - M_1)\,dv \geqslant 0, \qquad \int_E (M_2 - f)\,dv \geqslant 0.$$

Мы рассматривали до сих пор лишь неотрицательные функции f.

Перейдём к общему случаю. Представим непрерывную функцию f в виде

$$f = \left[\frac{1}{2} f + \frac{1}{2}|f|\right] - \left[\frac{1}{2}|f| - \frac{1}{2} f\right].$$

Очевидно, $\frac{1}{2}|f| + \frac{1}{2} f$ равна нулю там, где f отрицательна, и равна f там, где f положительна; эта функция называется положительной частью f. Аналогично $-\frac{1}{2}|f| + \frac{1}{2} f$ — отрицательная часть f.

Определим интеграл от функции f по области или по замкнутому множеству формулой

$$\int\limits_E f\,dv = \int\limits_E \left\{\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}|f|\right\} dv - \int\limits_E \left\{\frac{1}{2}|f| - \frac{1}{2}f\right\} dv.$$

Если хоть одно из слагаемых справа не имеет смысла, то функция f будет неинтегрируемой. Нетрудно распространить все предыдущие результаты на интегралы от функций любого знака.

§ 4. Суммируемые функции.

Переходим к рассмотрению общей теории интегралов.

Пусть f — произвольная неотрицательная функция, заданная в области Ω. Рассмотрим всевозможные *ограниченные* замкнутые множества F, на которых f непрерывна, и изучим

$$\sup \int\limits_F f\,dv$$

(sup обозначает верхнюю грань). *Будем называть эту верхнюю грань* (если она существует) *внутренним интегралом от функции* f и обозначим $(\overline{\text{ВН}}) \int\limits_\Omega f\,dv$. Для неположительных функций положим

$$(\text{ВН}) \int\limits_\Omega f\,dv = -(\overline{\overline{\text{ВН}}}) \int\limits_\Omega -f\,dv.$$

Наконец, для любой функции f определим

$$(\overline{\text{ВН}}) \int\limits_\Omega f\,dv = (\overline{\text{ВН}}) \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}|f| + \frac{1}{2}f\right) dv - (\overline{\text{ВН}}) \int\limits_\Omega \left[\frac{1}{2}|f| - \frac{1}{2}f\right] dv.$$

Если правая часть не имеет смысла, то интеграл не будет существовать.

Замечание 5. Необходимое и достаточное условие существования внутреннего интеграла от f в Ω состоит в том, что для любого ограниченного замкнутого множества F, на котором f непрерывна, интеграл $\int\limits_F f\,dv$ будет ограничен, т. е.

$$\left|\int\limits_F f\,dv\right| \leqslant A,$$

где A — постоянная, одна и та же для всех множеств F.

В самом деле, пусть внутренний интеграл существует и функция f непрерывна на F.

Пусть замкнутое множество F_1 состоит из таких точек F, где f неотрицательна. Тогда

$$\int\limits_F f\,dv \leqslant \int\limits_{F_1} f\,dv \leqslant \sup \int\limits_F \frac{1}{2}[|f| + f]\,dv.$$

Обозначив

$$A=\max\left((\overline{\overline{\text{ВН}}})\int\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}|f|\right\}dv,\quad (\overline{\text{ВН}})\int\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}|f|-\frac{1}{2}f\right\}dv\right),$$

и произведя аналогичную оценку снизу, убеждаемся в том, что наше условие необходимо.

Переходим к доказательству достаточности нашего условия.

Если $\frac{1}{2}[|f|+f]$ непрерывна на F и F_1 — та часть F, где $f \geqslant 0$, то f непрерывна на F_1. Пользуясь нашим условием, видим, что

$$\int\limits_{F}\frac{1}{2}[|f|+f]\,dv=\int\limits_{F_1}f\,dv\leqslant A,$$

откуда вытекает, что

$$\sup\int\limits_{F}\frac{1}{2}[|f|+f]\,dv\leqslant A \text{ и аналогично } \sup\int\limits_{F}\frac{1}{2}[|f|-f]\,dv\leqslant A,$$

что и требовалось доказать.

Основное свойство внутреннего интеграла в ограниченной области.

В ограниченной области Ω для любой функции f, внутренний интеграл от которой существует, можно указать такую систему замкнутых множеств F_ε, на которых f непрерывна, что если $F\supseteq F_\varepsilon$ и f непрерывна на F, то

$$\left|(\overline{\text{ВН}})\int\limits_{\Omega}f\,dv-\int\limits_{F}f\,dv\right|<\varepsilon.$$

Такую систему замкнутых множеств F_ε мы назовём исчерпывающей системой для функции f в области Ω.

Для неотрицательных функций f построение F_ε очевидно. Для того чтобы установить основное свойство для функций любого знака, докажем сначала лемму.

Лемма 4. Если F_ε — система исчерпывающих множеств для неотрицательной функции f в ограниченной области Ω, то множества F_ε^* тех точек F_ε, где $f\geqslant\varepsilon$, также образуют исчерпывающую систему.

В самом деле, пусть $F\supseteq F_\varepsilon$ и f непрерывна на F. Пусть $F_{2\varepsilon}^{(0)}$ — множество тех точек F, для которых $f\leqslant 2\varepsilon$. Тогда

$$\int\limits_{F_\varepsilon^*}f\,dv>\int\limits_{F_\varepsilon}f\,dv-\int\limits_{F_{2\varepsilon}^{(0)}}f\,dv.$$

Но

$$\int\limits_{F_{2\varepsilon}^{(0)}}f\,dv<2\varepsilon m\Omega.$$

Отсюда

$$\int_F f\,dv - \int_{F_\varepsilon^*} f\,dv < \int_F f\,dv - \int_{F_\varepsilon} f\,dv + \int_{F_{2\varepsilon}^{(0)}} f\,dv < \varepsilon\,(1+2m\Omega)$$

и значит F_ε^* действительно образуют исчерпывающую систему.

После этого для функции f любого знака можно построить F_ε как сумму:

$$F_\varepsilon = F_\varepsilon^{*\prime} + F_\varepsilon^{**},$$

где $F_\varepsilon^{*\prime}$ и F_ε^{**} строятся соответственно для положительной и отрицательной частей f.

Отметим, что если $F_\varepsilon^* \supseteq F_\varepsilon$, причём на F_ε^* функция f непрерывна, то F_ε^* обладает всеми свойствами F_ε.

Замечание 6. Пусть в области Ω дана последовательность ограниченных множеств $\overline{F}_\varepsilon$, на которых f непрерывна, и таких, что справедливо условие: каково бы ни было замкнутое множество $F \supseteq \overline{F}_\varepsilon$, на котором функция f непрерывна, справедливо неравенство:

$$\left|\int_F f\,dv - \int_{\overline{F}_\varepsilon} f\,dv\right| < \varepsilon\,.$$

Тогда существует внутренний интеграл от f по Ω, и система $\overline{F}_\varepsilon$ будет исчерпывающей системой для f.

Установим ограниченность $\int_F f\,dv$ по любому замкнутому множеству, где f непрерывна. В силу теоремы 2 (VI) имеем:

$$\int_F f\,dv = \int_{F+\overline{F}_{\varepsilon_1}} f\,dv + \int_{F\overline{F}_{\varepsilon_1}} f\,dv - \int_{\overline{F}_{\varepsilon_1}} f\,dv$$

(на $F+\overline{F}_{\varepsilon_1}$ функция f, очевидно, непрерывна), откуда

$$\left|\int_F f\,dv - \int_{F\overline{F}_{\varepsilon_1}} f\,dv\right| = \left|\int_{F+\overline{F}_{\varepsilon_1}} f\,dv - \int_{\overline{F}_{\varepsilon_1}} f\,dv\right| < \varepsilon_1.$$

Но на замкнутом множестве $\overline{F}_{\varepsilon_1}$ функция f ограничена и значит

$$\left|\int_{F\overline{F}_{\varepsilon_1}} f\,dv\right| < B.$$

Отсюда следует ограниченность $\left|\int_F f\,dv\right|$ и, в силу замечания 5, сущеоснование внутреннего интеграла от f. Далее, имеем

$$\left|\int\limits_{\overline{F}_{\varepsilon_1}} f\,dv - \int\limits_{\overline{F}_{\varepsilon_2}} f\,dv\right| \leqslant \left|\int\limits_{\overline{F}_{\varepsilon_1}} f\,dv - \int\limits_{\overline{F}_{\varepsilon_1}+\overline{F}_{\varepsilon_2}} f\,dv\right| + \left|\int\limits_{\overline{F}_{\varepsilon_1}+\overline{F}_{\varepsilon_2}} f\,dv - \int\limits_{\overline{F}_{\varepsilon_2}} f\,dv\right| \leqslant \varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

На основании признака Коши последовательность $\int\limits_{\overline{F}_{\varepsilon_k}} f\,dv$ стремится к определённому пределу при $\varepsilon_k \to 0$. Далее,

$$\left|(\overline{\overline{\text{BH}}})\int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{\overline{F}_{\varepsilon}} f\,dv\right| \leqslant \left|(\overline{\overline{\text{BH}}})\int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{F_\varepsilon+\overline{F}_{\varepsilon}} f\,dv\right| + \left|\int\limits_{F_\varepsilon+\overline{F}_{\varepsilon}} f\,dv - \int\limits_{\overline{F}_{\varepsilon}} f\,dv\right| < 2\varepsilon,$$

а потому, если $F \supseteq \overline{F}_\varepsilon$, то

$$\left|(\overline{\overline{\text{BH}}})\int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{F} f\,dv\right| \leqslant \left|(\overline{\overline{\text{BH}}})\int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{\overline{F}_\varepsilon} f\,dv\right| + \left|\int\limits_{\overline{F}_\varepsilon} f\,dv - \int\limits_{F} f\,dv\right| < 3\varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Нетрудно установить обратно, что множества F_ε некоторой исчерпывающей системы обладают свойством, указанным в замечании 6, ибо

$$\left|\int\limits_{F} f\,dv - \int\limits_{F_\varepsilon} f\,dv\right| \leqslant \left|(\overline{\overline{\text{BH}}})\int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{F} f\,dv\right| + \left|(\overline{\overline{\text{BH}}})\int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{F_\varepsilon} f\,dv\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Построенное нами понятие внутреннего интеграла не обладает, вообще говоря, некоторыми важными свойствами, характерными для классического определения интеграла. В частности, нельзя утверждать, что внутренний интеграл от суммы двух функций по области Ω равен сумме интегралов от слагаемых.

Для того чтобы сохранить это свойство, мы должны будем наложить некоторые ограничения на изучаемые нами функции.

Пусть функция f задана в *ограниченной области* Ω и существует внутренний интеграл. Нетрудно видеть, что из существования внутреннего интеграла от f в ограниченной области следует существование внутреннего интеграла от $f+M$ и наоборот. Потребуем, чтобы *при произвольной постоянной* M имело место равенство

$$(\overline{\overline{\text{BH}}})\int\limits_{\Omega}(f+M)\,dv = (\overline{\overline{\text{BH}}})\int\limits_{\Omega} f\,dv + (\overline{\overline{\text{BH}}})\int\limits_{\Omega} M\,dv.$$

Функции f, удовлетворяющие этому условию, мы назовём суммируемыми или интегрируемыми в смысле Лебега. Если функция f суммируема, то и $(f+M)$ будет суммируема. Докажем теорему.

Теорема 8. Для того чтобы функция f, имеющая внутренний интеграл, была суммируема, необходимо, чтобы мера F_ε могла быть сделана сколь угодно близкой к мере Ω.

Пусть f суммируема. Составим множества F_ε и $F_\varepsilon^{(M)}$ соответственно для f и $f+M$. Их сумма $F^*_\varepsilon = F_\varepsilon + F_\varepsilon^{(M)}$ должна служить множеством F_ε для обеих функций. При этом

$$\int\limits_{F^*_\varepsilon} (f+M)\,dv - \int\limits_{F^*_\varepsilon} f\,dv > (\overline{\text{ВН}}) \int\limits_{\Omega} (f+M)\,dv - (\overline{\text{ВН}}) \int\limits_{\Omega} f\,dv - 2\varepsilon =$$

$$= M \int\limits_{\Omega} dv - 2\varepsilon = Mm\Omega - 2\varepsilon.$$

Аналогично устанавливается, что $\int\limits_{F^*_\varepsilon} (f+M)\,dv - \int\limits_{F^*_\varepsilon} f\,dv < Mm\Omega + 2\varepsilon.$

Но

$$\int\limits_{F^*_\varepsilon} (f+M)\,dv - \int\limits_{F^*_\varepsilon} f\,dv = \int\limits_{F^*_\varepsilon} M\,dv = Mm\,F^*_\varepsilon$$

и, следовательно,

$$m\Omega - mF^*_\varepsilon < \frac{2\varepsilon}{|M|},$$

что и доказывает нашу теорему.

Мы установили таким образом, что для всякой суммируемой функции в ограниченной области Ω можно указать замкнутые множества F_ε с мерой, сколь угодно близкой к мере Ω, на которых f непрерывна. *Функции f, обладающие этим свойством, называются измеримыми.* Мы доказали, следовательно, что *всякая суммируемая функция измерима.*

Мы увидим вскоре, что справедливо и обратное утверждение. Если функция f имеет внутренний интеграл и, кроме того, измерима, то она будет суммируемой.

Теорема 9. Если f — суммируемая функция, то любая система замкнутых множеств F_δ, такая, что f непрерывна на F_δ и $mF_\delta > m\Omega - \delta$, где δ сколь угодно мала, является исчерпывающей системой для f в области Ω. Докажем это.

Пусть сначала $f \geqslant 0$. Заставим ε пробегать значения $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}, \ldots, \varepsilon_k = \frac{1}{2^k}, \ldots$ Построим какую-то исчерпывающую систему $F^*_{\varepsilon_s}$, с мерой, стремящейся к $m\Omega$, и пусть $\delta_1(\varepsilon_k) = \min(m\Omega - mF^*_{\varepsilon_s})$; $s \leqslant k$; тогда, если

$$m\Omega - mF^*_\varepsilon \leqslant \delta_1(\varepsilon_k),$$

то

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv - \int\limits_{F^*_\varepsilon} f\,dv \leqslant \varepsilon_k.$$

(Значок $fy\varepsilon$ опущен для краткости.)

Функция f достигает максимума на F^*_ε:

$$f \leqslant M(\varepsilon).$$

Возьмём за $\delta(\varepsilon)$ меньшее из чисел $\frac{\varepsilon}{M}$ и $\delta_1(\varepsilon)$ и пусть

$$mF_\delta \geqslant m\Omega - \delta.$$

Докажем, что

$$\int\limits_{F_\delta} f\,dv \geqslant \int\limits_{\Omega} f\,dv - 2\varepsilon. \tag{VI.4}$$

Тем самым теорема будет доказана.

В самом деле,

$$\int\limits_{F_\delta} f\,dv = \int\limits_{F_\delta + F_\varepsilon^*} f\,dv - \int\limits_{F_\varepsilon^*} f\,dv + \int\limits_{F_\delta F_\varepsilon^*} f\,dv. \tag{VI.5}$$

Но

$$\int\limits_{F_\delta + F_\varepsilon^*} f\,dv \geqslant \int\limits_{\Omega} f\,dv - \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{F_\varepsilon^*} f\,dv - \int\limits_{F_\delta F_\varepsilon^*} f\,dv$$

не превосходит ε. В самом деле,

$$\int\limits_{F_\varepsilon^*} f\,dv - \int\limits_{F_\delta F_\varepsilon^*} f\,dv = \left\{ \int\limits_{F_\varepsilon^*} (f-M)\,dv - \int\limits_{F_\delta F_\varepsilon^*} (f-M)\,dv \right\} + $$
$$+ \int\limits_{F_\varepsilon^*} M\,dv - \int\limits_{F_\delta F_\varepsilon^*} M\,dv.$$

Выражение в фигурной скобке не положительно и, значит,

$$\int\limits_{F_\varepsilon^*} f\,dv - \int\limits_{F_\delta F_\varepsilon^*} f\,dv \leqslant M\,(mF_\varepsilon^* - mF_\delta F_\varepsilon^*) < \varepsilon. \tag{VI.6}$$

Сопоставляя (VI.5) и (VI.6), получим (VI.4).

Если f произвольного знака, то для доказательства теоремы достаточно разбить эту функцию на сумму положительной и отрицательной частей.

Лемма 5. Пусть f — неотрицательная функция в ограниченной области Ω и пусть F_ε — некоторая система замкнутых множеств, на которых f непрерывна, и таких, что

$$m\Omega - mF_\varepsilon < \varepsilon.$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{F_\varepsilon} f\,dv,$$

то функция f суммируема, и этот предел равен:

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv.$$

Если бы хоть одно из этих утверждений оказалось неверным, то было бы верно неравенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{F_\varepsilon} f\,dv < \sup\int\limits_{F} f\,dv,$$

и мы могли бы указать такое замкнутое множество F_0, что

$$\int\limits_{F_0} f\,dv-\int\limits_{F_\varepsilon} f\,dv \geqslant \eta > 0, \tag{VI.7}$$

причём f непрерывна на F_0. Пусть $F'_\varepsilon = F_0 F_\varepsilon$. Усиливая (VI.7), будем иметь:

$$\int\limits_{F_0} f\,dv-\int\limits_{F'_\varepsilon} f\,dv \geqslant \eta > 0. \tag{VI.8}$$

Функция f на F_0 достигает своего максимума: $f \leqslant M$.
При этом

$$\int\limits_{F_0} f\,dv-\int\limits_{F'_\varepsilon} f\,dv = \left\{\int\limits_{F_0}(f-M)\,dv-\int\limits_{F'_\varepsilon}(f-M)\,dv\right\}+ \\ + M\,(mF_0-mF'_\varepsilon) \leqslant M\,(mF_0-mF'_\varepsilon).$$

Следовательно,

$$mF_0-mF'_\varepsilon \geqslant \frac{\eta}{M}.$$

Но это противоречит допущению (VI.7), ибо, в силу теоремы 2,

$$mF_0-mF_0F_\varepsilon < \varepsilon.$$

Следовательно, наше предположение неправильно. Лемма доказана.

Из доказанной леммы 4 вытекает ряд следствий, позволяющих иначе охарактеризовать класс суммируемых функций.

Следствие 1. Если функция суммируема в ограниченной области Ω, то она будет суммируема и в любой области Ω_1, внутренней по отношению к Ω. Пусть $f \geqslant 0$. Построим в Ω_1 любую расширяющуюся систему замкнутых множеств F'_ε так, чтобы иметь

$$\lim mF'_\varepsilon = m\Omega_1,$$

и пусть F''_ε — какая-то расширяющаяся исчерпывающая система замкнутых множеств для функции f в Ω, такая, что $\lim mF''_\varepsilon = m\Omega$.

Множества $F_\varepsilon = F'_\varepsilon \cdot F''_\varepsilon$ будут по мере сколь угодно близки к Ω_1 в силу того, что

$$m\Omega_1 - mF_\varepsilon \leqslant m\,(\Omega - F''_\varepsilon) + m\,(\Omega_1 - F'_\varepsilon).$$

На них функция f будет непрерывна.

Интегралы

$$\int_{F_\varepsilon} f\,dv$$

будут ограниченными и возрастающими при $\varepsilon \to 0$, т. е. будут иметь предел. На основании только что доказанной теоремы f будет суммируема на Ω, что и требовалось доказать.

Следствие 2. Если функция f, суммируемая в ограниченной области Ω, непрерывна на замкнутом множестве $F \subset \Omega$, то

$$\int_F f\,dv = \int_\Omega f\,dv - \int_{\Omega - F} f\,dv.$$

Доказательство следует из того, что можно выбрать F'_δ—исчерпывающую систему для $\Omega - F$, такую, что

$$\lim_{\delta\to 0} mF'_\delta = m(\Omega - F).$$

Таким образом, взяв

$$F_{\delta''} = F + F_{\delta'},$$

мы получим:

$$\lim_{\delta\to 0} mF_{\delta''} = mF + \lim_{\delta\to 0} mF_{\delta'} = mF + m(\Omega - F) = m\Omega.$$

Следовательно, $F_{\delta''}$ образуют исчерпывающую систему для Ω, откуда:

$$\int_\Omega f\,dv = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{F_{\delta''}} f\,dv = \int_F f\,dv + \lim_{\delta\to 0}\int_{F_{\delta'}} f\,dv = \int_F f\,dv + \int_{\Omega - F} f\,dv,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3. Пусть f суммируема в ограниченной области Ω. Тогда в соответствие любому ε можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что, коль скоро $\Omega_\delta \subset \Omega$, $m\Omega_\delta < \delta(\varepsilon)$:

$$\int_{\Omega_\delta} f\,dv \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство проведём от противного. Пусть f неотрицательна. Если бы наше утверждение было неверно, то мы могли бы указать такую последовательность Ω_δ с мерой, стремящейся к нулю, что

$$\int_{\Omega_\delta} f\,dv > \varepsilon_0,$$

где ε_0 — фиксированное число. Пусть F_δ — последовательность исчерпывающих множеств для f в Ω и $m(\Omega - F_\delta) < \delta$. Тогда замкнутые множества $F^*_\delta = F_\delta - \Omega_\delta$ обладают свойством:

$$mF^*_\delta > m\Omega - 2\delta.$$

Это ясно из того, что

$$\Omega - F^*_\delta = (\Omega - F_\delta) + \Omega_\delta,$$

и значит:

$$m(\Omega - F_\delta^*) \leqslant m(\Omega - F_\delta) + m\Omega_\delta \leqslant 2\delta.$$

Следовательно, F_δ^* суть исчерпывающие множества для f в Ω, и

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{F_\delta^*} f\,dv = \int\limits_{\Omega} f\,dv, \quad \text{а также} \quad \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\Omega - F_\delta^*} f\,dv = 0.$$

Но $\Omega_\delta \subset \Omega - F_\delta^*$, и поэтому

$$\int\limits_{\Omega_\delta} f\,dv < \int\limits_{\Omega - F_\delta^*} f\,dv.$$

Получившееся противоречие доказывает наше утверждение.

Доказанное нами свойство интегралов от суммируемых функций носит название абсолютной непрерывности интеграла.

Впоследствии мы неоднократно будем пользоваться этим свойством.

Лемма 6. Если функция f_2 измерима и неотрицательна, а f_1 суммируема, причём

$$f_2 \leqslant f_1,$$

то и функция f_2 также суммируема.

В самом деле, рассмотрим систему множеств $F_\varepsilon^{(1)}$ с мерой, стремящейся к $m\Omega$, на которых непрерывна f_1, и систему $F_\varepsilon^{(2)}$, на которых непрерывна f_2, также с мерой, стремящейся к $m\Omega$. Множества $F_\varepsilon^{(3)} = F_\varepsilon^{(1)} \cdot F_\varepsilon^{(2)}$, как вытекает из теоремы 2 (VI), будут иметь меру, стремящуюся к $m\Omega$. Из них можно построить расширяющуюся систему

$$F_\varepsilon^{(3)} = F_1,\ \ F_\varepsilon^{(3)} + F_{\frac{\varepsilon}{2}}^{(3)} = F_2\ \ F_\varepsilon^{(3)} + F_{\frac{\varepsilon}{2}}^{(3)} + \ldots + F_{\frac{\varepsilon}{2}}^{(3)} = F_{k+1},$$

которая обладает всеми сформулированными свойствами, будучи исчерпывающей для f_1. Мы будем иметь:

$$\int\limits_{F_k} f_2\,dv \leqslant \int\limits_{F_k} f_1\,dv \leqslant \int\limits_{\Omega} f_1\,dv.$$

Последовательность

$$\int\limits_{F_k} f_2\,dv$$

возрастает и, следовательно, имеет предел. На основании предыдущей леммы f_2 суммируема, что и требовалось доказать.

Теорема 10. Если f_1 и f_2 суммируемы в Ω, то и $f_1 + f_2$ суммируема и притом:

$$\int\limits_{\Omega} (f_1 + f_2)\,dv = \int\limits_{\Omega} f_1\,dv + \int\limits_{\Omega} f_2\,dv.$$

Пусть сначала $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \geqslant 0$.

Тогда, построив $F_\varepsilon^{(1)}$ и $F_\varepsilon^{(2)}$ так же, как в предыдущей лемме, и составив $F_\varepsilon^{(3)} = F_\varepsilon^{(1)} F_\varepsilon^{(2)}$, будем иметь

$$mF_\varepsilon^{(3)} \geqslant m\Omega - 2\varepsilon.$$

Функция $f_1 + f_2$ будет, очевидно, непрерывна на $F_\varepsilon^{(3)}$ и, кроме того,

$$\int\limits_{F_\varepsilon^{(3)}} (f_1 + f_2)\, dv = \int\limits_{F_\varepsilon^{(3)}} f_1\, dv + \int\limits_{F_\varepsilon^{(3)}} f_2\, dv. \qquad \text{(VI.9)}$$

Правая часть имеет пределом $\int\limits_\Omega f_1\, dv + \int\limits_\Omega f_2\, dv$. Следовательно, левая часть имеет предел.

Применяя лемму 5 (VI), убеждаемся в интегрируемости $f_1 + f_2$.

Пусть теперь f_1 и f_2 — функции произвольного знака и $f_3 = f_1 + f_2$. Очевидно,

$$\frac{1}{2}[f_3 + |f_3|] \leqslant \frac{1}{2}[f_1 + |f_1|] + \frac{1}{2}[f_2 + |f_2|], \qquad \text{(VI.10)}$$

$$\frac{1}{2}[|f_3| - f_3] \leqslant \frac{1}{2}[|f_1| - f_1] + \frac{1}{2}[|f_2| - f_2]. \qquad \text{(VI.11)}$$

Правые части обоих равенств суммируемы, как мы только что доказали.

На основании леммы 6 (VII) суммируемы также и левые части. Следовательно, f_3 суммируема. Остаётся установить равенство (VI.9). С этой целью заметим, что множества $F_\varepsilon^{(3)} = F_\varepsilon^{(1)} F_\varepsilon^{(2)}$ служат для f_3 исчерпывающей системой на основании теоремы 8 (VI).

Мы имеем

$$\int\limits_{F_\varepsilon^{(3)}} (f_1 + f_2)\, dv = \int\limits_{F_\varepsilon^{(3)}} f_1\, dv + \int\limits_{F_\varepsilon^{(3)}} f_2\, dv.$$

Переходя к пределу, получим доказательство теоремы.

Отметим очевидное второе элементарное свойство интеграла:

$$\int\limits_\Omega Cf\, dv = C \int\limits_\Omega f\, dv.$$

Признак обращения функции в нуль.

Пусть F — замкнутое множество в ограниченной области Ω, а $\zeta(P)$ — так называемая характеристическая функция этого множества, т. е. функция, заданная соотношением

$$\zeta(p) = \begin{cases} 1 & P \in F, \\ 0 & P \in \Omega - F. \end{cases}$$

Лемма 7. Можно построить такую непрерывную функцию $\varphi(P)$ в Ω, что мера множества Ω_ε точек, где $|\varphi(P) - \zeta(P)| > 0$, будет меньше ε:

$$m\Omega_\varepsilon < \varepsilon$$

и, кроме того,

$$0 \leqslant \varphi(P) \leqslant 1.$$

Пусть C — граница области Ω. Для доказательства рассмотрим множество F_h всех тех точек замкнутой области $\Omega + C$, которые находятся на расстоянии не менее чем h от F.

Положим

$$\varphi(P) = \begin{cases} 1 & P \in F, \\ 0 & P \in F_h. \end{cases}$$

На основании леммы 3 (VI) можно определить $\varphi(P)$ непрерывным образом во всей $\Omega + C$, так что $0 \leqslant \varphi(P) \leqslant 1$. Теперь $\Omega_\varepsilon = (\Omega - F) - F_h$.

Но пересечение последовательности вложенных друг в друга областей $(\Omega - F) - F_h$, соответствующих последовательности $h \to 0$ пусто и, значит, в силу теоремы 5 (VI):

$$\lim_{h \to 0} m\,[(\Omega - F) - F_h] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 11. Если $f(P)$ суммируема в области Ω и если, какова бы ни была непрерывная функция $\psi(P)$ в Ω, справедливо равенство

$$\int_\Omega f(P)\,\psi(P)\,dv = 0,$$

то функция $f(P)$ удовлетворяет условию

$$\int_\Omega |f(P)|\,dv = 0.$$

Докажем эту теорему.

Предположим противное. Пусть $\int\limits_\Omega |f(P)|\,dv \neq 0$.

При этом, очевидно, один из интегралов

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\,[f(P) + |f(P)|]\,dv \quad \text{или} \quad \int_\Omega \frac{1}{2}\,[f(P) - |f(P)|]\,dv$$

не равен нулю, ибо их разность отлична от нуля. Интегралы эти равны друг другу с противоположным знаком в силу того, что для $\psi(P) = 1$ имеем $\int\limits_\Omega f(P)\,dv = 0$.

Тогда существует замкнутое множество F', такое, что на нём $f^+ = \frac{1}{2}\,[f(P) + |f(P)|]$ непрерывна и

$$\int_{F'} \left\{ \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} |f| \right\} dv = h > 0.$$

Рассмотрим множества $F_2 \subseteq F'$, где $f^+ \geqslant \frac{h}{2mF'} = \varepsilon_0$ и $F_1 \subseteq F'$, где $f^+ \leqslant \frac{h}{2mF'} = \varepsilon_0$; очевидно

$$\int_{F'} f^+\,dv \leqslant \int_{F_2} f^+\,dv + \int_{F_1} f^+\,dv.$$

Далее,

$$\int\limits_{F_1} f^+ \, dv \leqslant \frac{h}{2mF'} \, mF_1 \leqslant \frac{h}{2}.$$

Следовательно, $\int\limits_{F_2} f^+ \, dv \geqslant \frac{h}{2}$. Отсюда заключаем, что

$$mF_2 \geqslant \frac{h}{2 \max f}.$$

На этом же множестве F_2 функция $f(P)$ непрерывна и $f(P) \geqslant \varepsilon_0$. Пусть $\xi(P)$ — характеристическая функция множества F_2. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} f(P) \, \xi(P) \, dv \geqslant \varepsilon_0 mF_2.$$

Построим теперь функцию $\varphi(P)$ с помощью леммы 7 (VI) так, чтобы иметь

$$m\Omega_\eta < \eta.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega} f(P) \, [\varphi(P) - \xi(P)] \, dv \leqslant \int\limits_{\Omega_\eta} |f(P)| \, dv.$$

Из суммируемости интеграла $\int\limits_{\Omega} |f(P)| \, dv$ следует, что $\int\limits_{\Omega_\eta} |f(P)| \, dv$ будет сколь угодно мал при достаточно малом η и, следовательно, может быть сделан меньше, чем $\frac{\varepsilon_0 mF_2}{2}$. При этом

$$\int\limits_{\Omega} f(P) \, \varphi(P) \, dv > \left| \int\limits_{\Omega} f(P) \, \xi(P) \, dv \right| - \left| \int\limits_{\Omega} f(P) \, [\varphi(P) - \xi(P)] \, dv \right| > \frac{\varepsilon_0 mF_2}{2},$$

что противоречит условию теоремы.

З а м е ч а н и е. Если условие теоремы выполняется только для функций $\psi(P)$, отличных от нуля каждая только в некоторой области Ω_ψ, внутренней по отношению к Ω, то доказательство сохраняет силу.

§ 5. Неопределённые интегралы от функции одной переменной. Примеры.

Очевидно, если $f(x)$ — суммируемая функция в промежутке $0 < x < 1$, то она будет суммируема и в любом промежутке $0 < x < y$, где $y \leqslant 1$. Интеграл

$$F(y) = \int\limits_0^y f(x) \, dx$$

называется неопределённым интегралом.

Докажем теорему.

Т е о р е м а 12. Производная от неопределённого интеграла равна подинтегральной функции во всех точках непрерывности этой функции.

В самом деле,

$$\frac{F(y+h)-F(y)}{h}=\frac{1}{h}\int\limits_{y}^{y+h} f(x)\,dx.$$

Обозначим через m_h и M_h соответственно нижнюю и верхнюю грани функции $f(x)$ в промежутке $y \leqslant x \leqslant y+h$, тогда

$$m_h < \frac{F(y+h)-F(y)}{h} < M_h$$

и, следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(y+h)-F(y)}{h}=f(y),$$

что и требовалось доказать.

Измеримая функция может не быть суммируемой.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 7. Функция $f=\frac{1}{R^{n-\alpha}}$, где $R=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$ измерима в шаре $R<1$. В самом деле, если исключить из этого шара внутренность малого шарика, $R\leqslant\varepsilon$, в оставшейся части f будет непрерывна. Эта функция будет суммируема в случае $\alpha>0$. Для того чтобы доказать это, заметим, что,

$$\int\limits_{\frac{1}{2^k}\leqslant R\leqslant 1}\!\!\cdots\int\frac{dx_1\ldots dx_n}{R^{n-\alpha}}=\sum_{m=0}^{k-1}\psi_m,$$

где

$$\psi_m=\int\limits_{\frac{1}{2^{m+1}}\leqslant R\leqslant\frac{1}{2^m}}\!\!\cdots\int\frac{dx_1\ldots dx_n}{R^{n-\alpha}}.$$

Сделаем в ψ_m замену переменных $x_i=\frac{\xi_i}{2^m}$, $i=1,\ldots,n$. При этом

$$\psi_m=\frac{1}{2^{m\alpha}}\int\limits_{\frac{1}{2}\leqslant\rho\leqslant 1}\!\!\cdots\int\frac{d\xi_1\ldots d\xi_n}{\left[\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2}\right]^{n-\alpha}}=\frac{1}{2^{m\alpha}}\psi_0,$$

где

$$\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2},$$

откуда

$$\sum_{m=0}^{k-1}\psi_m\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{m\alpha}}\psi_0=\psi_0\frac{2^\alpha}{2^\alpha-1},$$

что и требовалось доказать.

Пример 8. Функция $f=\frac{1}{r^{n-\alpha}}$, где $r=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$, измерима в $2n$-мерной области $0<x_i<1$; $0<y_i<1$; $i=1, \ldots, n$. Она будет суммируемой при $\alpha>1$.

В самом деле, если исключить из этого куба множество $r\leqslant\varepsilon$, то f в оставшейся части будет непрерывна. Объём исключённой области, как легко видеть, есть малая величина порядка ε^n. Суммируемость f при $\alpha>1$ устанавливается, как в прошлом примере.

Пример 9. Функция f в кубе v_0, $-1<x_i<1$ $(i=1, \ldots, n)$, принимающая значение единицы в точках, все координаты которых рациональны, и нуля во всех остальных, суммируема.

В самом деле, все рациональные точки, как известно, могут быть перенумерованы числами натурального ряда

$$P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$$

Каждую из них можно заключить внутрь некоторого эллипсоида Ω_k с центром в начале координат и с фокусом в данной точке так, что $m\Omega_k\leqslant\frac{1}{2^{k+t}}$.

Сумма $\Omega_0^{(t)}=\Omega_1+\ldots+\Omega_k+\ldots$ будет областью с мерой $\leqslant\frac{1}{2^t}$ и поэтому сколь угодно малой. Множество $F_t=v_0-\Omega_0^{(t)}$ имеет меру, сколь угодно близкую к мере v_0. На нём f непрерывна и равна нулю. F_t образуют исчерпывающую систему; значит,

$$\int\limits_{-1<x_i<1}\!\!\ldots\int f\,dv=0.$$

Нам часто придётся рассматривать функции, заданные в неограниченной области Ω.

Рассмотрим систему шаров $R<N$, и пусть Ω_N обозначает часть области Ω, лежащую внутри этого шара. Положительную функцию f мы будем называть измеримой в Ω, если она измерима в любом Ω_n, и суммируемой в Ω, если интегралы

$$\int\limits_{\Omega_N} f\,dv$$

ограничены. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} f\,dv=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{\Omega_N} f\,dv.$$

Интегралы от функций любого знака определяются как обычно.

Пример 10. Пусть $f=\frac{1}{R^{n+\alpha}}$; $R=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$ в области $R>1$.

Функция f, очевидно, измерима в Ω. Она будет суммируемой в Ω при $\alpha>0$.

В самом деле,

$$\int\limits_{R>1}\!\!\ldots\int\frac{dx_1\ldots dx_n}{R^{n+\alpha}}=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_m,$$

где

$$\psi_m = \int\limits_{2^m < R < 2^{m+1}} \cdots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{R^{n+\alpha}}.$$

Положим

$$x_i = 2^m \xi_i; \quad i = 1, \ldots, n \text{ и } \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2};$$

тогда

$$\psi_m = \frac{1}{2^{m\alpha}} \int\limits_{1<\rho<2} \cdots \int \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{\rho^{n+\alpha}} = \frac{1}{2^{m\alpha}} \psi_0,$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} \psi_m = \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1} \psi_0,$$

что и требовалось доказать.

Из примеров 7 и 10 следует, между прочим, что интегралы

$$\int\limits_{R<\delta} \cdots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{R^{n-\alpha}} \quad \text{и} \quad \int\limits_{R>\frac{1}{\delta}} \cdots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{R^{n+\alpha}}$$

стремятся к нулю при $\delta \to 0$.

§ 6. Свойства суммируемых функций.

До сих пор мы рассматривали лишь интегралы от непрерывных функций f по областям или замкнутым множествам и от суммируемых функций по областям. Пользуясь доказанными теоремами, мы можем обобщить эти понятия.

Пусть Ω — ограниченная область, а E — какое-нибудь точечное множество в этой области. Составим характеристическую функцию $\xi(P)$ для множества E, т. е. функцию, равную единице в точках E и нулю — вне E.

Если функция $\xi(P)$ измерима (а значит и суммируема), то множество E называется измеримым, а интеграл

$$\int\limits_{\Omega} \xi(P)\, dv$$

называется *мерой* E и обозначается mE.

Нетрудно проверить, что в случаях, когда E — область или замкнутое множество, наше определение совпадает с первым, ибо построение mE с помощью нового определения будет тем же, что и раньше.

Т е о р е м а 13. Необходимое и достаточное условие измеримости множества E состоит в следующем.

Рассмотрим замкнутые множества F_k, содержащиеся в E, и области Ω_k, которые содержат E:

$$F_k \subseteq E \subseteq \Omega_k.$$

Тогда можно выбрать Ω_k и F_k так, что

$$m(\Omega_k - F_k) \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

При этом, очевидно,

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega_k} f\,dv=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{F_k} f\,dv.$$

Докажем сначала некоторую общую лемму.

Лемма 8. Пусть $f(P)$ — функция, равная нулю вне E и такая, что $f(P)\geqslant 1$ в точках E. Для того чтобы эта функция была измеримой, необходимо и достаточно следующее:
можно указать такие замкнутые множества $F_k\subset E$, на которых f непрерывна, и такие области $\Omega_k\supseteq E$, вне которых она непрерывна, что

$$\lim_{k\to\infty}(m\Omega_k-mF_k)=0.$$

Предположим, что функция f измерима, тогда можно указать замкнутые множества F_δ с мерой, сколь угодно близкой к $m\Omega$, на которых f непрерывна. Каждое такое F_δ распадается на два множества без общих точек

$$F_\delta=F_\delta^{(1)}+F_\delta^{(2)},$$

где $F_\delta^{(1)}=F_\delta E$, $F_\delta^{(2)}=F_\delta-E$; на $F_\delta^{(1)}$ функция $f(P)\geqslant 1$, а на $F_\delta^{(2)}$ функция $f(P)=0$.

$$mF_\delta=mF_\delta^{(1)}+mF_\delta^{(2)}>m\Omega-\delta.$$

Отсюда

$$mF_\delta^{(1)}+m\Omega-m(\Omega-F_\delta^{(2)})>m\Omega-\delta$$

или

$$m(\Omega-F_\delta^{(2)})-mF_\delta^{(1)}<\delta.$$

Множества $F_\delta^{(1)}$ и $(\Omega-F_\delta^{(2)})$ и есть те множества, существование которых утверждает теорема. Обратно, если F_k и Ω_k существуют, то, взяв какую-нибудь исчерпывающую систему многогранников Φ_k для области Ω, легко убеждаемся, что функция $f(P)$ непрерывна на F_k и на $\Psi_k=\Phi_k-\Omega_k$, а следовательно, и на $F_k+(\Phi_k-\Omega_k)$.

Оценим $m\Psi_k$. Мы имеем:

$$\Omega-\Psi_k=\Omega-\Phi_k+\Omega_k$$

и, значит,

$$m(\Omega-\Psi_k)\leqslant m\Omega_k+\eta,$$

где η — малое число. Отсюда следует непосредственно, что

$$m\Psi_k\geqslant m\Omega-m\Omega_k-\eta.$$

Таким образом, функция f будет непрерывна на множествах $F_k+\Psi_k$ с мерой, сколь угодно близкой к мере Ω, и, следовательно, будет измерима, что и требовалось доказать.

Помимо интегралов по областям и по замкнутым множествам иногда рассматривают интегралы от функции f по измеримым множествам E. Функция f называется измеримой на измеримом множестве E, если функции

$$f^*=\begin{cases} f & P\in E\\ 0 & P\in\Omega-E\end{cases}$$

будет измерима в области Ω, содержащей E. Интеграл от f по E определяется формулой

$$\int_E f\,dv = \int_\Omega f^*\,dv.$$

Нетрудно убедиться, что функция f будет измерима на E тогда и только тогда, если можно указать такую систему замкнутых множеств $F_\varepsilon \subset E$, на которых f непрерывна, что $mF_\varepsilon > mE - \varepsilon$. При этом

$$\int_E f\,dv = \lim \int_{F_\varepsilon} f\,dv.$$

Доказательство этого утверждения приводит к уже рассмотренной лемме 8 (VI).

Заметим предварительно, что если $f \geqslant 0$ и измерима, то $f^* + \varphi_E$, где φ_E — характеристическая функция множества E, тоже будет измеримой. $f^* + \varphi_E \geqslant 1$ в точках E и равна нулю вне E. После этого, применяя лемму 8 (VI), получим наш результат.

Свойства измеримых множеств мы не будем разбирать подробнее.

Если множество E может быть заключено в область сколь угодно малой меры, то оно, согласно нашему определению, имеет меру нуль.

Из леммы 5 (VI) следует, что значения, которые принимает функция f на множестве меры нуль, не отражаются ни на её суммируемости, ни на величине интеграла от неё.

Это было, например, в нашем примере 8. Поэтому нам часто будет удобно считать две функции f_1 и f_2 тождественными, если они отличаются на множестве точек с мерой нуль, и считать функцию f заданной вполне, если она задана везде, кроме точек множества E меры нуль.

Мы будем при этом говорить, что f_1 и f_2 совпадают *почти везде* или что f задана *почти везде*.

З а м е ч а н и е. Если $f \geqslant 0$ в ограниченной области Ω и $\int_\Omega f\,dv = 0$, то функция f может быть неравной нулю лишь на множестве точек с мерой нуль.

В самом деле, пусть F_k — система замкнутых множеств, на которых f непрерывна, и таких, что

$$m\Omega - mF_k < \frac{1}{2^k}.$$

Пусть F_k^* — множество тех точек F_k, где $f \leqslant \frac{1}{2^k}$, а F_k^{**} — множество тех точек F_k, где $f \geqslant \frac{1}{2^{k+1}}$ (k — целое число).

Имеем:

$$mF_k^* + mF_k^{**} \geqslant mF_k.$$

С другой стороны,

$$0 = \int_{F_k^{**}} f\,dv \geqslant \frac{1}{2^{k+1}}\,mF_k^{**},$$

откуда имеем $mF_k^{**} = 0$ и $mF_k^* = mF_k$.

Рассмотрим пересечение

$$F^{(k)} = F_k^{\bullet} \cdot F_{k+1}^{\bullet} \cdot F_{k+2}^{\bullet} \cdots$$

Как мы видели ранее,

$$m\Omega - mF^{(k)} \leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

На множестве $F^{(k)}$ функция f, будучи меньше любого $\frac{1}{2^s}$, равна нулю. Множество точек, где $f \neq 0$, принадлежит всем областям $\Omega - F^{(k)}$, мера которых сколь угодно мала. Следовательно, его мера равна нулю, что и требовалось доказать.

Рассмотрим ещё один вопрос, важный для дальнейшего. Пусть E — некоторое измеримое ограниченное множество, и пусть $F^{(1)}$ — система замкнутых множеств, принадлежащих множеству E; $F^{(1)}$ состоит из множеств:

$$F_1^{(1)} \subseteq F_2^{(1)} \subseteq F_3^{(1)} \subseteq \ldots \subseteq F_k^{(1)} \subseteq \ldots$$

Систему $F^{(2)}$, *состоящую из множеств*

$$F_1^{(2)} \subseteq F_2^{(2)} \subseteq F_3^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq F_k^{(2)} \subseteq \ldots,$$

мы назовём внутренней по отношению к $F^{(1)}$, *если для любого* $F_k^{(2)}$ *можно указать такое множество* $F_{n_k}^{(1)}$, *что* $F_k^{(2)} \subseteq F_{n_k}^{(1)}$.

Условимся при этом писать:

$$F^{(2)} \ll F^{(1)} \quad \text{или} \quad F^{(1)} \gg F^{(2)}.$$

(Соотношение $F^{(1)} \gg F^{(2)}$ не исключает $F^{(1)} \ll F^{(2)}$.) Из $F^{(1)} \gg F^{(2)}$ и $F^{(2)} \gg F^{(3)}$ следует $F^{(1)} \gg F^{(3)}$.

Лемма 9. Пусть дана последовательность систем замкнутых множеств на множестве E:

$$F^{(1)} \gg F^{(2)} \gg F^{(3)} \gg \ldots F^{(S)} \gg \ldots$$

и таких, что $\lim\limits_{k \to \infty} (mE - mF_k^{(S)}) = 0$.

(Эта система есть просто система исчерпывающих множеств для характеристической функции множества E.)

Тогда существует система $F^{(\omega)}$, внутренняя по отношению ко всем $F^{(S)}$ и такая, что опять $\lim\limits_{k \to \infty} (mE - mF_k^{(\omega)}) = 0$.

Докажем эту лемму.

В каждой системе $F^{(S)}$ выберем такое множество $F_n^{(S)} = F^{(S)\bullet}$, что:

$$mF_n^{(S)} \geqslant mE - \frac{1}{2^S}.$$

Пусть

$$F_k^{(\omega)} = F^{(k)\bullet} F^{(k+1)\bullet} \ldots F^{(m)\bullet} \ldots$$

Очевидно, что

$$F_1^{(\omega)} \subseteq F_2^{(\omega)} \subseteq \ldots \subseteq F_k^{(\omega)} \subseteq \ldots$$

Множества $F_k^{(\omega)}$ суть замкнутые множества.

Нетрудно видеть, что система $F^{(\omega)}$ является внутренней по отношению к любой из систем $F^{(S)}$. Это следует из того, что $F_k^{(\omega)} \subseteq F^{(S)*}$ для любого $S \geqslant k$.

Остаётся показать, что $\lim\limits_{k\to\infty} mF_k^{(\omega)} = mE$. Имеем

$$mE - mF_k^{(\omega)} \leqslant m(E - F^{(k)*}) + m(E - F^{(k+1)*}) + \ldots + m(E - F^{(k+m)*}) + \ldots$$

$$\ldots \leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{k-1}},$$

откуда и следует наше утверждение. Лемма доказана.

Следствием этой важной леммы является теорема:

Теорема Егорова. Последовательность функций $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$, непрерывных на замкнутом множестве F, сходящаяся всюду на F, сходится равномерно на системе замкнутых множеств F_δ, таких, что

$$\lim_{\delta\to 0} mF_\delta = mF.$$

Для доказательства этой теоремы рассмотрим замкнутые множества $F_k(\varepsilon)$, обладающие тем свойством, что на них

$$|f_{m_1} - f_{m_2}| \leqslant \varepsilon$$

для любых $m_1 > k$ и $m_2 > k$.

Каково бы ни было ε, каждая точка F принадлежит хотя бы одному $F_k(\varepsilon)$. Следовательно,

$$F = F_1(\varepsilon) + \ldots + F_k(\varepsilon) + \ldots$$

Кроме того, $F_1(\varepsilon) \subseteq F_2(\varepsilon) \subseteq \ldots \subseteq F_k(\varepsilon) \subseteq \ldots$

Применяя теорему 6 (VI), будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} mF_k(\varepsilon) = mF.$$

Рассмотрим последовательность систем $F^{(S)}$, состоящих из $F_1\left(\frac{1}{2^S}\right)$, $F_2\left(\frac{1}{2^S}\right), \ldots$

Очевидно,

$$F^{(1)} \gg F^{(2)} \gg \ldots$$

Применяя лемму 8 (VI), убеждаемся в существовании системы $F^{(\omega)}$, внутренней по отношению ко всем $F^{(S)}$. На любом множестве $F_k^{(\omega)}$ последовательность $f_1, f_2, \ldots$ сходится равномерно.

В самом деле, $F_k^{(\omega)}$ лежит внутри некоторого $F_{n_S}^{(S)}$ для любого (S) и, значит, мы получим:

$$|f_{m_1} - f_{m_2}| < \frac{1}{2^S} \text{ при } m_1 > n_S,\ m_2 > n_S.$$

Теорема доказана.

Из теоремы Егорова непосредственно следует основной факт теории измеримых функций.

Следствие. Сходящаяся почти всюду последовательность измеримых в ограниченной области Ω функций $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ имеет своим пределом измеримую функцию.

Действительно, выделим замкнутые множества F_k, на которых f_k непрерывна, так, чтобы иметь

$$m\Omega - mF_k \leqslant \frac{\delta}{2^{k+1}}.$$

На множестве

$$F_0 = F_1F_2 \ldots F_k \ldots$$

все функции $f_1, f_2, \ldots$ непрерывны.

Подсчитаем меру F_0.

Мы имеем

$$mF_0 = \lim_{k\to\infty} mF_1F_2 \ldots F_k,$$

$$mF_1 - mF_1F_2 = m(F_1+F_2) - mF_2 \leqslant m\Omega - mF_2 \leqslant \frac{\delta}{2^3},$$

$$mF_1F_2 - mF_1F_2F_3 = m(F_1F_2 + F_3) - mF_3 \leqslant m\Omega - mF_3 \leqslant \frac{\delta}{2^4} \text{ и т. д.,}$$

откуда

$$mF_1F_2 \ldots F_k \geqslant mF_1 - \frac{\delta}{4} = m\Omega - (m\Omega - mF_1) - \frac{\delta}{4} \geqslant m\Omega - \frac{\delta}{2}$$

и, следовательно,

$$mF_0 \geqslant m\Omega - \frac{\delta}{2}.$$

Из сходимости $f_1, \ldots, f_k, \ldots$ почти всюду следует существование замкнутых множеств F_δ, таких, что $mF_\delta \geqslant m\Omega - \frac{\delta}{2}$, на которых она сходится. Тогда $F_\delta^* = F_0F_\delta$ обладает свойством

$$mF_\delta^* \geqslant m\Omega - \delta.$$

На основании теоремы Егорова последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ сходится равномерно на множестве $F'_\delta \subset F_\delta^*$, таком, что

$$mF_\delta^* - mF'_\delta < \delta$$

и, значит, $mF'_\delta \geqslant m\Omega - 2\delta$ и, следовательно,

$$f_0 = \lim_{k\to\infty} f_k$$

непрерывна на множестве F'_δ с мерой, сколь угодно близкой к $m\Omega$, и является измеримой, что и требовалось доказать.

Пользуясь теоремой Егорова, можно доказать одну важную лемму.

Лемма 10. Если неубывающая последовательность суммируемых функций $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ в области Ω обладает тем свойством, что

$$\int_\Omega f_k\, dv \leqslant A,$$

т. е. если интегралы от её членов остаются ограниченными, то последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ имеет почти всюду своим пределом суммируемую функцию

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f_0$$

и, кроме того,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} (f_0 - f_k)\, dv = 0.$$

Докажем эту лемму сначала для случая $f_k \geqslant 0$. Введём в рассмотрение функции

$$\psi_k = \operatorname{arctg} f_k.$$

Очевидно, ψ_k будет неубывающей ограниченной последовательностью. Поэтому ψ_k сходится всюду на Ω.

Обозначим

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k = \psi_0.$$

Из рассуждений, приведённых при доказательстве следствия из теоремы Егорова, мы видим, что существуют замкнутые множества F_δ

$$m\Omega - mF_\delta < \delta,$$

на которых сходимость равномерная и ψ_0 непрерывна.

Пусть F'_δ — замкнутое множество тех точек F_δ, для которых $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$.

На F'_δ функция ψ_k равномерно стремится к $\frac{\pi}{2}$ и, значит, $f_k = \operatorname{tg} \psi_k$ равномерно стремится к ∞. Следовательно,

$$mF'_\delta = 0,$$

иначе мы имели бы

$$\int_{F'_\delta} f_k\, dv \to \infty,$$

что, очевидно, невозможно.

Заключив F'_δ в область Ω_δ, такую, что

$$m\Omega_\delta < \delta,$$

положим

$$F^*_\delta = \Omega_\delta - F_\delta.$$

Очевидно,

$$mF^*_\delta > m\Omega - 2\delta.$$

На множествах F^*_δ последовательность ψ_k равномерно сходится к пределу, отличному от $\frac{\pi}{2}$, и, значит, f_k равномерно сходится к конечному пределу. Таким образом, существует

$$\int_{F^*_\delta} f_0\, dv = \lim_{k\to\infty} \int_{F^*_\delta} f_k\, dv.$$

Рассмотрим множества

$$\tilde{F}_s = F^*_\delta + F^*_{\frac{\delta}{2}} + \ldots + F^*_{\frac{\delta}{2^s}}.$$

Имеем

$$\int_{\tilde{F}_s} f_0\, dv < A.$$

При возрастании s этот интеграл возрастает. Следовательно, существует

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\tilde{F}_s} f_0\, dv \leqslant A.$$

Применяя лемму 5 (VI), убеждаемся, что f_0 суммируема. Далее, при достаточно большом k

$$\int_{\tilde{F}_s} f_0\, dv < \int_{\tilde{F}_s} f_k\, dv + \varepsilon \leqslant \int_{\Omega} f_k\, dv + \varepsilon_1,$$

откуда следует

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\tilde{F}_s} f_0\, dv = \int_{\Omega} f_k\, dv \leqslant \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k\, dv + \varepsilon_1$$

и, значит,

$$\int_{\Omega} f_0\, dv \leqslant \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k\, dv.$$

В силу $f_0 \geqslant f_k$, очевидно, справедливо и обратное неравенство.

Лемма доказана.

Если f_k любого знака, то нам достаточно рассмотреть

$$\varphi_k = f_k - f_1,$$

и доказательство сводится к предыдущему.

§ 7. Теорема Лебега-Фубини.

Пусть в кубе $\Omega_0\, (0 < x_i < 1,\ 0 < y_j < 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$, *задана суммируемая функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ *от* $m+n$ *независимых переменных. Рассмотрим некоторое измеримое множество* E *и пусть* $E\,(y_1, \ldots, y_m)$ *будет сечение этого множества многообразием*

$$y_1 = \text{const.}, \ y_2 = \text{const.}, \ \ldots, \ y_m = \text{const.},$$

т. е. множество точек, имеющих те же координаты

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

что и точки $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ *из* E *при фиксированных* $y_1, \ldots, y_m$. *Пусть* E_y *будет проекция* E *на многообразие* $y_1, \ldots, y_m$, *т. е. множество всех точек, координаты* $y_1, \ldots, y_m$ *которых таковы же, как у каких-либо точек из* E.

Определим функцию

$$\varphi^{(E)}(y_1, \ldots, y_m) = \begin{cases} 0 \text{ вне } E_y, \\ \displaystyle\int_{E(y_1, \ldots, y_m)} f\, dx_1 \ldots dx_n \text{ в } E_y. \end{cases} \qquad \text{(VI.12)}$$

Тогда:

а) *Интегралы в правой части* (VI.12) *существуют почти для всех значений* $y_1, \ldots, y_m$ (*т. е. для всех, кроме, быть может, точек некоторого множества с мерой нуль*).

б) *Функция* $\psi^{(E)}(y_1, \ldots, y_m)$ *есть суммируемая функция от переменных* $y_1, \ldots, y_m$.

в) $$\int\limits_E f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m = \int\limits_{0<y_j<1} \Psi^{(E)}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m. \tag{VI.13}$$

Без ограничения общности можно считать f положительной. Докажем эту теорему сначала для случая, когда E есть область Ω, а функция f непрерывна в Ω. Построим систему Φ_h сеточных многогранников, исчерпывающих область Ω. Очевидна формула:

$$\int\limits_{\Phi_h} f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m = \int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(\Phi_h)}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m. \tag{VI.14}$$

Последовательность $\psi^{(\Phi_h)}(y_1, \ldots, y_m)$ есть возрастающая последовательность измеримых функций, таких, что

$$\int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(\Phi_h)}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m \leqslant \int\limits_{\Omega} f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m.$$

На основании леммы 10(VI) эта последовательность имеет почти везде предел $\psi'(y_1, \ldots, y_m)$, так что

$$\lim_{h\to 0} \psi^{(\Phi_h)}(y_1, \ldots, y_m) = \psi'(y_1, \ldots, y_m)$$

и

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(\Phi_h)}(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m = \int\limits_{0<y_j<1} \psi'(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m.$$

Но $\Phi_h(y_1, \ldots, y_m)$ образуют исчерпывающую систему многогранников для $\Omega(y_1, \ldots, y_m)$, либо любая точка $\Omega(y_1, \ldots, y_m)$ попадёт в один из $\Phi_h(y_1, \ldots, y_m)$, следовательно,

$$\psi'(y_1, \ldots, y_m) = \psi^{(\Omega)}(y_1, \ldots, y_m).$$

Переходя к пределу в (VI.14), получим наше утверждение.

Из доказанного следует одно важное замечание.

Пусть мы рассматриваем систему областей $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \supset \Omega_k \supset \ldots$, таких, что

$$\lim_{k\to\infty} m\Omega_k = 0.$$

Тогда почти для всех $y_1, \ldots, y_m$ будем иметь: $m\Omega_k(y_1, \ldots, y_m) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

В самом деле, по доказанному:

$$m\Omega_k = \int\limits_{0<y_j\vee 1} m\Omega_k(y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m.$$

Последовательность функций $m\Omega_k(y_1, \ldots, y_m) = \psi_k(y_1, \ldots, y_m)$ монотонна и измерима, следовательно, она имеет предел во всех точках

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k = \psi_0(y_1, \ldots, y_m).$$

На основании леммы 8(VI) мы можем перейти к пределу под знаком интеграла

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{0<y_j<1} \psi_k\, dy_1 \ldots dy_m = \int\limits_{0<y_j<1} \psi_0\, dy_1 \ldots dy_m = \lim_{k\to\infty} m\Omega_k = 0.$$

Следовательно, $\psi_0 = 0$ почти везде. Наше утверждение доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда E есть замкнутое множество F, на котором f непрерывна. Этот случай приводится к предыдущему, если распространить f на весь куб Ω_0 и рассмотреть область $\Omega = \Omega_0 - F$. Очевидно,

$$\int\limits_F f\, dx_1 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_m = \int\limits_{\Omega_0} f\, dx_1 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_m -$$

$$- \int\limits_{\Omega} f\, dx_1 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_m. \tag{VI.15}$$

С другой стороны,

$$\psi^{(F)} + \psi^{(\Omega)} = \psi^{(\Omega_0)}$$

и, значит,

$$\int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(F)}\, dy_1 \ldots dy_m =$$

$$\int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(\Omega_0)}\, dy_1 \ldots dy_m - \int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(\Omega)}\, dy_1 \ldots dy_m. \tag{VI.16}$$

Подставляя в правую часть (VI.15) представление $(m+n)$-кратных интегралов через функции $\psi^{(\Omega_0)}$ и $\psi^{(\Omega)}$ и пользуясь формулой (VI.16), получим нашу теорему для этого случая.

Рассмотрим, наконец, случай, когда E есть область Ω, но f не непрерывная функция. Общий случай, очевидно, будет следовать из этого.

Построим исчерпывающую систему замкнутых множеств F_k для функции f. По доказанному

$$\int\limits_{F_k} f\, dx_1 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_m = \int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(F_k)}\, dy_1 \ldots dy_m. \tag{VI.17}$$

Последовательность $\psi^{(F_k)}$ есть возрастающая последовательность измеримых функций, таких, что

$$\int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(F_k)}\, dy_1 \ldots dy_m \leqslant \int\limits_{\Omega} f\, dx_1 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_m.$$

На основании леммы она имеет почти везде конечный предел ψ', такой, что

$$\lim \psi^{(F_k)} = \psi', \quad \lim \int\limits_{0<y_j<1} \psi^{(F_k)}\, dy_1 \ldots dy_m = \int\limits_{0<y_j<1} \psi'\, dy_1 \ldots dy_m.$$

Докажем, что

$$\psi' = \psi^{(\Omega)}.$$

С этой целью установим, что $F_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ образуют исчерпывающую систему для $\Omega(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ почти для всех $y_1, \ldots, y_m$.

В самом деле объём области $\Omega - F_k$ сколь угодно мал при достаточно большом k. Следовательно, в силу замечания почти для всех $y_1, \ldots, y_m$

$$\lim_{k\to\infty} m\,[\Omega(y_1, y_2, \ldots, y_m) - F_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)] = 0.$$

Значит $F_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ действительно образуют исчерпывающую систему для $\Omega(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ почти для всех $y_1, \ldots, y_m$ и, значит, $\psi' = \psi^{(\Omega)}$.

Предельный переход в формуле (VI.17) доказывает теорему Лебега-Фубини.

Добавление. Если функция

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

измерима, $f \geqslant 0$ и если, кроме того, функция $\psi^{(E)}$ существует и суммируема, т. е. утверждение а) теоремы Лебега-Фубини выполняется и правая часть формулы (VI.13) имеет смысл, то функция f будет суммируемой и, следовательно, теорема Лебега-Фубини справедлива в полном объёме. Тогда имеет смысл и левая часть формулы (VI.13), которая равна правой.

Это почти очевидно. В самом деле, если бы оказалось, что функция f не суммируема, то интегралы

$$\int\limits_F f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m,$$

взятые по замкнутым множествам, на которых она непрерывна, могли бы быть сделаны как угодно большими. Пусть некоторый интеграл, стоящий в правой части (VI.13), равен A. Выберем замкнутое множество F так, чтобы иметь

$$\int\limits_F f\,dx_1 \ldots dx_n\,dy_1 \ldots dy_m > A + 1.$$

Построим функцию

$$f_1 = \xi(P)\,f(P),$$

где ξ — характеристическая функция множества F. Тогда $\psi_1^{(E)}$ существует и суммируема, причём

$$\int\limits_{0 \leqslant y_i \leqslant 1} \psi_1^{(E)}\,dy_1\,dy_2 \ldots dy_m > A + 1.$$

С другой стороны, очевидно,

$$\psi_1^{(E)} \leqslant \psi^{(E)};$$

и значит

$$\int\limits_{0 \leqslant y_i \leqslant 1} \psi_1^{(E)}\,dy_1\,dy_2 \ldots dy_m \leqslant \int\limits_{0 \leqslant y_i \leqslant 1} \psi^{(E)}\,dy_1\,dy_2 \ldots dy_m = A.$$

Получившееся противоречие говорит о том, что наше предположение неверно. Из теоремы Лебега-Фубини вытекает ещё одно очевидное следствие, заслуживающее быть отмеченным.

В повторном интеграле от суммируемой функции можно переставлять порядок интегрирования.

ЛЕКЦИЯ VII.

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА.

§ 1. Интегралы, равномерно сходящиеся при данном значении параметра.

Рассмотрим область D переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и пусть у нас дана функция

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda),$$

заданная в области D при значении λ в промежутке

$$a \leqslant \lambda \leqslant b.$$

Рассмотрим несобственный абсолютно сходящийся интеграл:

$$\psi(\lambda) = \int \underset{D}{\ldots} \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad \text{(VII.1)}$$

Напомним, как это было определено в предыдущей лекции, что интеграл называется сходящимся, если можно указать некоторое конечное число многообразий M_i (точек, поверхностей и т. п.), так что, выделив эти многообразия с помощью их окрестности σ, мы сделаем функцию F непрерывной в оставшейся области и на её границе и, если, кроме того, при стремлении окрестности σ к ΣM_i по любому закону, существует предел

$$\lim \int \underset{D-\sigma}{\ldots} \int F\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Мы будем говорить, что интеграл (VII.1) *сходится равномерно при* $\lambda = \lambda_0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое число* $h(\varepsilon)$ *и такую часть* $\sigma(\varepsilon)$ *области* D, *что*

1. Функция $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ непрерывна по $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$ в области $D-\sigma$ и на её границе при $|\lambda-\lambda_0| \leqslant h(\varepsilon)$.

2. Интеграл

$$\int \underset{\sigma(\varepsilon)}{\cdots} \int |F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)|\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n < \varepsilon$$

для всех значений λ из промежутка $\lambda_0 - h(\varepsilon) \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0 + h(\varepsilon)$.

3. Область $D - \sigma$ ограничена (это условие не нужно, если область D ограничена).

Лемма 1. Равномерно сходящийся при $\lambda = \lambda_0$ интеграл есть функция от λ, непрерывная в этой точке.

В самом деле,

$$\begin{gathered}
\left| \int \underset{D}{\cdots} \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1)\, dx_1 \ldots dx_n - \right. \\
\left. - \int \underset{D}{\cdots} \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)\, dx_1 \ldots dx_n \right| \leqslant \\
\leqslant \left| \int \underset{D-\sigma}{\cdots} \int [F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1) - F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)]\, dx_1 \ldots dx_n \right| + \\
+ \left| \int \underset{\sigma}{\cdots} \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1)\, dx_1 \ldots dx_n \right| + \\
+ \left| \int \underset{\sigma}{\cdots} \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)\, dx_1 \ldots dx_n \right| \leqslant \\
\leqslant \int \underset{D-\sigma}{\cdots} \int |F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1) - F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)|\, dx_1 \ldots dx_n + \\
+ \int \underset{\sigma}{\cdots} \int |F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1)|\, dx_1 \ldots dx_n + \\
+ \int \underset{\sigma}{\cdots} \int |F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)|\, dx_1 \ldots dx_n.
\end{gathered}$$

Выбрав $\sigma(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon)$ такими, чтобы второе и третье слагаемые каждое порознь были меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, а затем, взяв $|\lambda_1 - \lambda_0|$ столь малым, чтобы для всех $x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих области $D - \sigma$, имело место неравенство

$$|F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1) - F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)| < \frac{\varepsilon}{3(D-\sigma)}, \quad \text{где} \quad D - \sigma$$

означает меру (объём) области $D-\sigma$, мы получим:

$$\left|\int_D \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1)\, dx_1 \ldots dx_n - \right.$$
$$\left. - \int_D \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \right| < \varepsilon.$$

Наша лемма доказана.

Интеграл (VII.1), сходящийся при всех λ из некоторого промежутка так, что можно найти общее $\sigma(\varepsilon)$ для всех λ, будет равномерно сходящимся в этом промежутке (в обычном смысле). Равномерно сходящийся интеграл в некотором промежутке есть непрерывная функция в промежутке.

В некоторых случаях удобно соответственным образом обобщить понятие о равномерной сходимости интеграла при данном значении параметра на случай, когда независимым параметром служит какая-нибудь точка P с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ в пространстве n-измерений.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_D \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n, P)\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad \text{(VII.2)}$$

Мы будем говорить, что этот интеграл равномерно сходится в точке P_0, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность $h(\varepsilon)$ точки P_0 и такую часть $\sigma(\varepsilon)$ области D, что

1. Функция F непрерывна, когда P изменяется в окрестности $h(\varepsilon)$ точки P_0, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — в области $D-\sigma$ и на её границе.

2. Интеграл

$$\int_\sigma \cdots \int |F(x_1, \ldots, x_n, P)|\, dx_1 \ldots dx_n < \varepsilon$$

для всех P из $h(\varepsilon)$.

3. Область $D-\sigma$ ограничена.

Для этого случая также имеет место лемма.

Лемма 2. Равномерно сходящийся при $P=P_0$ интеграл есть функция от P, непрерывная в точке P_0.

Доказательство является повторением рассуждений предыдущей леммы.

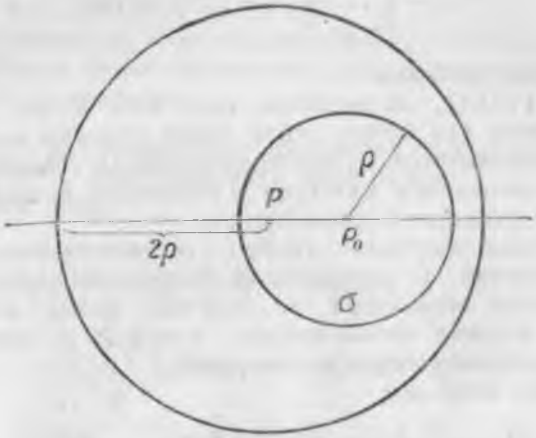
Укажем два примера.

Пример 1. Пусть функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, P)$, заданная в ограниченной области D, удовлетворяет условию

$$|F(x_1, \ldots, x_n, P)| < \frac{A}{r^{n-\alpha}},$$

где $\alpha > 0$ и A — некоторая постоянная.

Через r обозначено расстояние от точки $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ до точки с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$. Во всей области D, кроме точки $P(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, предположим F непрерывной функцией $x_1, x_2, \ldots, x_n$.



Черт. 10.

Равномерная сходимость интеграла

$$\int_D \ldots \int F(x_1, \ldots, x_n, P)\, dx_1 \ldots dx_n$$

в точке $P = P_0$ легко устанавливается. Достаточно взять за σ шар такого радиуса ρ, описанный вокруг P_0, чтобы

$$\int_{r<2\rho} \ldots \int \frac{A}{r^{n-\alpha}}\, dx_1 \ldots dx_n < \varepsilon,$$

а за $h(\varepsilon)$ — шар радиуса

$$\rho_1 < \rho.$$

В самом деле, при этом

$$\left| \int_\sigma \ldots \int F(x_1, \ldots, x_n, P)\, dx_1 \ldots dx_n \right| < \int_\sigma \ldots \int |F|\, dx_1 \ldots dx_n <$$

$$< \int_{r\leqslant 2\rho} \ldots \int \frac{A}{r^{n-\alpha}}\, dx_1 \ldots dx_n < \varepsilon\ [1].$$

---

[1]) Очевидно, что шар радиуса $r \leqslant 2\rho$ с центром в точке P будет содержать шар σ с центром P_0 (черт. 10), если точка P отстоит от точки P_0 не более чем на $\rho_1 < \rho$.

Очевидно, что в $D-\sigma$ и на её границе, для точек P из окрестности $h(\varepsilon)$ функция F будет непрерывной функцией своих аргументов.

Пример 2. Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, P, Q)$, заданная в ограниченной области D, удовлетворяет условию

$$|F(x_1, x_2, \ldots, x_n, P, Q)| < \frac{A}{r_1^{n-\alpha} \cdot r_2^{n-\beta}},$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha + \beta > n$, а через r_1 обозначено расстояние от точки $P(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ до переменной точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которую мы возьмём за точку интегрирования, а через r_2 — расстояние от некоторой второй точки $Q(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots \tilde{y}_n)$ до этой же переменной точки интегрирования. Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, P, Q)$ предполагается непрерывной в D, если $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$. Докажем, что интеграл

$$\int_D \cdots \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, P, Q)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

равномерно сходится в точке P_0 при любом её положении. Рассмотрим прежде всего случай, когда P_0 совпадает с Q. Выберем начало координат в точке Q, и пусть координаты P будут $(R, 0, \ldots, 0)$.

Общность наших заключений от этого не пострадает.

Если мы докажем, что интеграл

$$\int_{r_2<\rho} \cdots \int |F|\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

при любом значении $R < \frac{\rho}{2}$ может быть сделан меньше заданного положительного числа ε соответствующим выбором ρ, то наша цель будет достигнута [1]).

Пусть сначала $R > 0$. Оценивая этот интеграл, будем иметь:

$$\int_{r_2<\rho} \cdots \int |F|\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant A \int_{r_2<\rho} \cdots \int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{\left[\sqrt{(x_1-R)^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right]^{n-\alpha} \left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right]^{n-\beta}}.$$

[1]) За $\sigma(\varepsilon)$ в этом случае выбран шар радиуса ρ вокруг начала, содержащий точку P, а за $h(\varepsilon)$ выбран шар радиуса $\frac{\rho}{2}$ также вокруг начала координат, т. е. точки $Q = P_0$. Равномерную сходимость интеграла хотим показать в точке $P = Q$.

Введя новые независимые переменные

$$x_1 = R\xi_1, \quad x_2 = R\xi_2, \; \ldots, \; x_n = R\xi_n,$$

дадим последнему интегралу вид:

$$A \underset{\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}\leqslant\frac{\rho}{R}}{\int\cdots\int} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n}{R^{n-\alpha-\beta}\left[\sqrt{(\xi_1-1)^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}\right]^{n-\alpha}\left[\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}\right]^{n-\beta}} =$$

$$= \frac{A}{R^{n-\alpha-\beta}} \underset{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2}\leqslant 2}{\int\cdots\int} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n}{\left[\sqrt{(\xi_1-1)^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}\right]^{n-\alpha}\left[\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}\right]^{n-\beta}} +$$

$$+ \frac{A}{R^{n-\alpha-\beta}} \times$$

$$\times \underset{2\leqslant\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2}\leqslant\frac{\rho}{R}}{\int\cdots\int} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n}{\left[\sqrt{(\xi_1-1)^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}\right]^{n-\alpha}\left[\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}\right]^{n-\beta}} =$$

$$= AR^{\alpha+\beta-n}(Y_1+Y_2).$$

Интеграл Y_1 есть конечное число, не зависящее от ρ и R. Интеграл Y_2 оценивается, если заметить, что вне шара радиуса 2, т. е. при $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2} > 2$ мы имеем:

$$\sqrt{(\xi_1-1)^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}. \qquad \text{(VII.3)}$$

В самом деле,

$$4\left[(\xi_1-1)^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2\right]-\left[\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2\right] =$$
$$= 2(\xi_1-2)^2+\left[\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2-4\right]+2\left[\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2\right] \geqslant 0.$$

Пользуясь (VII.3), имеем:

$$Y_2 \leqslant 2^{n-\alpha} \underset{2\leqslant\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2}\leqslant\frac{\rho}{R}}{\int\cdots\int} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n}{\left[\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}\right]^{2n-\alpha-\beta}}; \qquad \text{(VII.4)}$$

если мы положим $\xi = \frac{\rho}{R} y$ и увеличим область интегрирования, оценка для Y_2 запишется так:

$$Y_2 \leqslant 2^{n-\alpha}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-\alpha-\beta} \int \underset{0 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \leqslant 1}{\cdots} \int \frac{dy_1\, dy_2 \ldots dy_n}{\left[\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}\right]^{2n-\alpha-\beta}},$$

что даёт

$$\int \underset{r_2<\rho}{\cdots} \int |F|\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \leqslant C_1 R^{\alpha+\beta-n} + C_2 \rho^{\alpha+\beta-n} \leqslant C_3 \rho^{\alpha+\beta-n},$$

где C_1, C_2 и C_3—постоянные, не зависящие от ρ и R.

Если теперь ρ достаточно мало, этот интеграл меньше ε, что и требовалось доказать.

Если P_0 не совпадает с Q, то равномерная сходимость нашего интеграла при $P = P_0$ следует непосредственным применением результата, полученного в примере 1.

§ 2. Производная по параметру от несобственных интегралов.

Пусть мы имеем интеграл

$$\varphi(\lambda) = \int \underset{D}{\cdots} \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

по области D, не зависящей от параметра λ. В анализе часто приводится формула

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \int \underset{D}{\cdots} \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \int \underset{D}{\cdots} \int \frac{\partial F}{\partial\lambda}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \varphi(\lambda),$$

справедливая в том случае, когда интеграл в правой части—собственный. Нам полезно будет избавиться от этого предположения. Справедлива теорема.

Теорема 1. Если:

а) Функция $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ есть первообразная по λ функция для $f(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ в области D переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при $a \leqslant \lambda \leqslant b$, т. е.

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda) - F(x_1, \ldots, x_n, a) = \int\limits_a^\lambda f(x_1, \ldots, x_n, \lambda)\, d\lambda$$

при всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из D, кроме, быть может, некоторых изолированных поверхностей [1]).

б) Функция f—суммируемая функция $(n+1)$ переменного $(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$, т. е. интеграл

$$\int_a^\lambda \int \ldots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)\, dx_1 \ldots dx_n\, d\lambda$$

существует при $a \leqslant \lambda \leqslant b$.

в) Функция

$$\varphi(\lambda) = \int \ldots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)\, dx_1 \ldots dx_n$$

непрерывна при $\lambda = \lambda_0$.

Тогда справедлива формула:

$$\left.\frac{\partial \psi(\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int \ldots \int_D F(x_1, \ldots, x_n, \lambda)\, dx_1 \ldots dx_n \bigg|_{\lambda=\lambda_0} =$$
$$= \int \ldots \int_D f(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Доказательство этой теоремы не представляет труда. По определению

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int \ldots \int_D [F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0 + h) -$$
$$- F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_0)]\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Интеграл, стоящий в правой части, равен на основании теоремы Фубини:

$$\int \ldots \int_D f\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\, d\lambda,$$
$$\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + h,$$

а этот последний интеграл представляется в виде

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+h} \left(\int \ldots \int_D f\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \right) d\lambda.$$

[1]) Кроме, быть может, множества меры нуль.

Пользуясь свойством неопределённых интегралов Лебега в точке непрерывности подинтегральной функции (см. § 5 (VI)), имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0}=\varphi(\lambda_0),$$

что и требовалось доказать.

Нам часто придётся пользоваться этой теоремой для тех или иных интегралов. Мы дадим несколько простейших признаков выполнения основного условия (б) этой теоремы.

Признак 1. Условие (б) теоремы 1 (VII) выполнено, если интеграл

$$\int\limits_D \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

равномерно сходится в замкнутом промежутке

$$a \leqslant \lambda \leqslant b.$$

Доказательства этого признака мы не приводим. Читатели легко проведут его сами.

Признак 2. Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)$ непрерывна по всем своим аргументам везде, за исключением непрерывной по λ линии:

$$\begin{gathered} x_1=a_1(\lambda), \quad x_2=a_2(\lambda), \ \ldots, \ x_n=a_n(\lambda) \\ a\leqslant\lambda\leqslant b \end{gathered} \tag{VII.5}$$

и в окрестности этой линии удовлетворяет неравенству

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)| \leqslant A\rho_1^{-n+\varepsilon},$$

где

$$\rho=\min_{a\leqslant\lambda\leqslant b}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[x_i-a_i(\lambda)]^2}$$

и

$$\varepsilon>0,$$

то условие (б) выполнено.

Выделим из области

$$\begin{cases} D \\ a\leqslant\lambda\leqslant b \end{cases}$$

линию (VII.5) с помощью области σ_0, в точках которой $\rho<\rho_0$, где ρ_0 — постоянная. Интеграл

$$\int\limits_{\substack{D\\ a\leqslant\lambda\leqslant b}} \cdots \int |f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)|\, dx_1 \ldots dx_n\, d\lambda \tag{VII.6}$$

будет сходящимся, если существует предел интеграла

$$\underset{\left\{\substack{D\\ a\leqslant\lambda\leqslant b}\right\}-\sigma_0}{\int\cdots\int} |f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)|\,dx_1\ldots dx_n\,d\lambda \quad \text{при} \quad \rho_0\to 0.$$

(Обозначения области интегрирования очевидны.) Этот предел существует, если предел при $\rho_0\to 0$ выражения

$$\underset{\sigma_0}{\int\cdots\int} |f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)|\,dx_1\ldots dx_n\,d\lambda$$

равен нулю.

Мы имеем:

$$\underset{\sigma_0}{\int\cdots\int} |f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)|\,dx_1 dx_2\ldots dx_n\,d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b d\lambda \underset{0<\rho\leqslant\rho_0}{\int\cdots\int} A\rho^{-n+\varepsilon}\,dx_1\ldots dx_n.$$

Но интеграл

$$\underset{0<\rho\leqslant\rho_0}{\int\cdots\int} \rho^{-n+\varepsilon}\,dx_1\ldots dx_n = c_n\rho_0^{\varepsilon};$$

отсюда ясна сходимость исследуемого интеграла.

Признак 3. Если область D не ограничена, то, кроме особенности признака 2, оцениваемой на основе прежних соображений, нужно оценить поведение функции на бесконечности.

Сходимость интеграла (VII.6) обеспечена, если

$$|F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)| \leqslant Ar^{-b-\varepsilon},$$

где

$$\varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}.$$

Читатель легко докажет справедливость этого признака. Теперь мы можем несколько облегчить условия, указанные нами в лекции VI для обращения функции в нуль.

Лемма. Любая непрерывная функция $\psi(P)$ в области Ω, отличная от нуля лишь в области Ω_ψ, лежащей внутри Ω вместе со своей границей, может со сколь угодной большой точностью быть приближена с помощью функции $\psi_h(P)$, имеющей непрерывные производные любого порядка и отличной от нуля лишь в области Ω_h, состоящей из точек, расстояние которых до Ω_ψ меньше, чем h.

Построим функцию $\psi_h(P)$ по формуле

$$\psi_h(P)=\frac{\int\limits_{r\leqslant h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}\psi(P')\,dP'}{\int\limits_{r\leqslant h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}\,dP},$$

где

$$r=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+\ldots+(x_n-x_n')^2}.$$

Функция $\psi_h(P)$ неограниченно дифференцируема. В самом деле, обозначим

$$\int\limits_{r\leqslant h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}\,dP'=\varkappa(h)$$

и определим функцию $\omega(P, P')$ соотношениями

$$\omega(P, P')=\begin{cases} 0; & r>h \\ \dfrac{1}{\varkappa(h)}e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}; & r\leqslant h.\end{cases}$$

Функция $\psi_h(P)$ может быть записана в виде

$$\psi_h(P)=\int\limits_{\Omega}\psi(P')\,\omega(P, P')\,dP'.$$

В таком виде к ней применима основная теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла. В самом деле, функция $\omega(P, P')$ имеет непрерывные производные любого порядка по координатам точки P.

Производные любого порядка от $\omega(P, P')$, очевидно, существуют при $r<h$ и при $r>h$. Их предельные значения при $r>h$ и $r\to h$ будут все равны нулю. Нам нужно установить, что и предельные значения всех производных от ω при $r<h$, $r\to h$ тоже будут равны нулю. Это следует из того, что любая производная от ω порядка s будет иметь вид:

$$\frac{\partial^s\omega}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=\frac{e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}}{(r^2-h^2)^s}\,Q(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'),$$

где Q — многочлен от своих аргументов. Но $e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}$ стремится к нулю быстрее, чем $\frac{1}{(r^2-h^2)^s}$ идёт к бесконечности, и, значит,

$$\lim_{r\to h}\frac{\partial^s\omega}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=0.$$

Для равности $\psi_h(P)-\psi(P)$ имеем:

$$\psi_h(P)-\psi(P)=\frac{\int\limits_{r\leq h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}\left[\psi(P')-\psi(P)\right]dP'}{\int\limits_{r\leq h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}\,dP'}.$$

При достаточно малом h

$$|\psi(P')-\psi(P)|<\varepsilon,$$

откуда по теореме о среднем

$$|\psi_h(P)-\psi(P)|<\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Эта лемма позволяет пользоваться интегральным признаком обращения функции в нуль в несколько ослабленной форме [см. § 4 (VI)]. Пусть f суммируема в Ω. Положим, что

$$\int\limits_{\Omega} f(P)\,\psi(P)\,dP=0 \tag{VII.7}$$

для всех функций $\psi(P)$, имеющих непрерывные производные любого порядка и отличных от нуля каждая только в некоторой внутренней подобласти Ω_ψ области Ω.

Этого достаточно для того, чтобы утверждать, что

$$\int\limits_{\Omega} |f(P)|\,dP=0.$$

В самом деле, если условие (VII.7) выполнено для всех неограниченно дифференцируемых функций, то оно выполнено и для всех непрерывных функций. Предположим противное. Тогда существует функция $\psi_0(P)$, такая, что

$$\int\limits_{\Omega} f(P)\,\psi_0(P)\,dP>\alpha.$$

В силу леммы, существуют функции $\psi_h(P)$, сколь угодно близкие к ψ_0 и дифференцируемые неограниченно. Имеем:

$$\int\limits_{\Omega} f(P)\,\psi_0(P)\,dP=\int\limits_{\Omega} f(P)\,\psi_h(P)\,dP+\int\limits_{\Omega} f(P)\left[\psi_0(P)-\psi_h(P)\right]dP.$$

По условию первое слагаемое равно нулю. С другой стороны,

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(P)\left[\psi_0(P)-\psi_h(P)\right]dP\right|\leqslant \max|\psi_0(P)-\psi_h(P)|\int\limits_{\Omega}|f(P)|\,dP<\varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число. Мы пришли к противоречию, доказывающему наше утверждение.

ЛЕКЦИЯ VIII.

УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА.

§ 1. Фундаментальное решение.

После того как мы рассмотрели некоторые задачи для уравнений с двумя независимыми переменными, мы переходим к уравнениям со многими независимыми переменными.

Рассмотрим прежде всего уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \text{(VIII.1)}$$

определяющее температуру в точках некоторого тела.

Считая тело однородным, будем иметь

$$a^2=\text{const},$$

и простая замена

$$t_1=a^2t$$

позволяет избавиться от коэффициента a^2. Поэтому мы будем при дальнейшем изложении считать a^2 равным единице. Прибавляя ещё для общности в правую часть свободный член, запишем уравнение распространения тепла в виде

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial t}+f(x, y, z, t). \qquad \text{(VIII.2)}$$

Это уравнение мы и будем решать.

Мы рассмотрим здесь задачу о распространении тепла в неограниченной среде.

Будем решать для уравнения (VIII.2) задачу Коши, т. е. задачу об интегрировании уравнения (VIII.2) при начальном условии

$$u\,|_{t=0}=\varphi(x, y, z).$$

При этом существенную роль будет играть одно частное решение уравнения теплопроводности (VIII.1), некоторые свойства которого мы установим. Рассмотрим функцию

$$v=\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}, \tag{VIII.3}$$

где

$$r=\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2}.$$

Докажем несколько лемм относительно этой функции.

Лемма 1. Функция v при $t_0>t$ удовлетворяет уравнениям:

$$\Delta_0 v-\frac{\partial v}{\partial t_0}=0, \quad \Delta v+\frac{\partial v}{\partial t}=0. \tag{VIII.4}$$

$\left(\text{Здесь } \Delta_0 v \text{ обозначает } \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y_0^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z_0^2}.\right)$

В самом деле, дифференцирование даёт:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2}=-\frac{1}{16\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}+\frac{(x_0-x)^2}{32\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{7}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}},$$

откуда

$$\Delta_0 v=\left(\frac{-3}{16\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{5}{2}}}+\frac{r^2}{32\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{7}{2}}}\right)e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}},$$

и далее

$$\frac{\partial v}{\partial t_0}=\left(\frac{-3}{16\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{5}{2}}}+\frac{r^2}{32\pi^{\frac{3}{2}}(t_0-t)^{\frac{7}{2}}}\right)e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}},$$

что доказывает выполнение первого из уравнений (VIII.4). Второе получается из первого, если заметить, что функция зависит только от разностей (x_0-x), (y_0-y), (z_0-z), (t_0-t), и, значит,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t_0}=-\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Лемма 2. При $t_0>t$ интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}v\,dx\,dy\,dz=1.$$

В самом деле, вводя полярные координаты r, θ и φ и пользуясь симметрией v, будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\infty} r^2\,dr \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} v\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{r^2}{2\pi^{\frac{1}{2}}(t_0-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\,dr = \frac{-1}{\pi^{\frac{1}{2}}(t_0-t)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} r\,d\left(e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}(t_0-t)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\,dr\ ^{1)} = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\,d\frac{r}{2(t_0-t)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz.$$

На основании хорошо известной формулы имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}, \tag{VIII.5}$$

откуда и вытекает наша лемма [2]).

Лемма 3. При $(t_0-t)>0$ и $(t_0-t)\to 0$ функция v удовлетворяет условиям

$$\lim_{t_0-t\to 0} v = \begin{cases} 0, & r\neq 0, \\ +\infty, & r=0. \end{cases}$$

Доказательство этой леммы очевидно.

Функцию (VIII.3) называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

---

[1]) Здесь произведено интегрирование по частям.

[2]) Доказательство формулы (VIII.5) можно, например, провести так: Рассмотрим

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\infty} re^{-r^2}dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,d(r^2) = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi.$$

Следовательно, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$.

Лемма 4. Пусть $F(x, y, z)$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, определённая во всём пространстве. Тогда

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint\limits_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = F(x_0, y_0, z_0), \qquad \text{(VIII.6)}$$

где Ω — любая область, содержащая x_0, y_0, z_0, в частности, Ω может совпадать со всем пространством, а $\xi > 0$. Для доказательства составим разность

$$\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint\limits_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz - F(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint\limits_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} [F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\, dx\, dy\, dz. \qquad \text{(VIII.7)}$$

Выделим точку (x_0, y_0, z_0) шаром малого радиуса δ. Пусть δ достаточно мало, так что при $r \leqslant \delta$

$$|F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим разность (VIII.7), разбив интеграл в правой части на два слагаемых, соответственно, распространённых на шар $r \leqslant \delta$ и на его внешность.

Мы получим:

$$\iiint\limits_{\Omega} v\,[F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{r\leqslant\delta} v\,[F(x, y, z) -$$

$$- F(x_0, y_0, z_0)]\, dx\, dy\, dz + \iiint\limits_{r\geqslant\delta} v\,[F(x, y, z) -$$

$$- F(x_0, y_0, z_0)]\, dx\, dy\, dz. \qquad \text{(VIII.8)}$$

Оцениваем первый из интегралов, входящих в (VIII.8):

$$\left|\iiint\limits_{r\leqslant\delta} v\,[F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\, dx\, dy\, dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2} v\, dx\, dy\, dz = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, в силу ограниченности F

$$|F| \leqslant M,$$

$$\left| \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint\limits_{r \geqslant \delta} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} [F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)]\, dx\, dy\, dz \right| <$$

$$\leqslant \frac{2M}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint\limits_{r \geqslant \delta} e^{-\frac{r^2}{4\xi}}\, dx\, dy\, dz.$$

Заменяя переменные в последнем интеграле, полагаем $x = \sqrt{\xi}\, x_1$, $y = \sqrt{\xi}\, y_1$, $z = \sqrt{\xi}\, z_1$; тогда $r_1^2 = \frac{r^2}{\xi}$, и мы имеем:

$$\frac{2M}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \iiint\limits_{r_1 > \frac{\delta}{\sqrt{\xi}}} e^{-\frac{r_1^2}{4}}\, dx_1\, dy_1\, dz_1 = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\delta}{\sqrt{\xi}}}^{\infty} r_1^2 e^{-\frac{r_1^2}{4}}\, dr_1.$$

При достаточно малом ξ этот интеграл меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, в силу своей сходимости. Отсюда и следует наша лемма.

Замечание. Вместо интеграла (VIII.6) можно рассмотреть более общий интеграл:

$$\Phi(x_0, y_0, z_0, \xi) = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint\limits_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} F(x, y, z, \xi)\, dx\, dy\, dz, \quad \text{(VIII.9)}$$

в котором подинтегральная функция $F(x, y, z, \xi)$ зависит от параметра ξ, непрерывна и ограничена:

$$|F(x, y, z, \xi)| < M,$$

и пусть

$$\lim_{\xi \to 0} F(x, y, z, \xi) = F(x, y, z), \quad \text{(VIII.10)}$$

причём $F(x, y, z, \xi)$ стремится к $F(x, y, z)$ равномерно в любой ограниченной области.

Тогда

$$\lim_{\xi \to 0} \Phi(x_0, y_0, z_0, \xi) = F(x_0, y_0, z_0).$$

В самом деле, рассмотрим разность

$$\Phi(x_0, y_0, z_0, \xi) - \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint\limits_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}} \iiint\limits_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}} [F(x, y, z, \xi) - F(x, y, z)]\, dx\, dy\, dz.$$

Разбивая этот интеграл на две части: на интеграл по шару $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant 1$, который мы обозначим через σ, и интеграл по внешности этого шара, получим:

$$\left|\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}}\iiint\limits_{\sigma} e^{-\frac{r^2}{4\xi}}[F(x, y, z, \xi)-F(x, y, z)]\,dx\,dy\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}}\iiint\limits_{\sigma} e^{-\frac{r^2}{4\xi}}dx\,dy\,dz<\varepsilon;$$

$$\left|\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}}\iiint\limits_{\Omega-\sigma} e^{-\frac{r^2}{4\xi}}[F(x, y, z, \xi)-F(x, y, z)]\,dx\,dy\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{4\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}}\iiint\limits_{\Omega-\sigma} e^{-\frac{r^2}{4\xi}}\,dx\,dy\,dz.$$

Последнее выражение опять стремится к нулю (см. оценку в лемме (VIII.4)). Следовательно,

$$\lim_{\xi\to 0}\Phi(x_0, y_0, z_0, \xi)=\lim_{\xi\to 0}\left[\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}}\iiint\limits_{\Omega} e^{-\frac{r^2}{4\xi}}F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\right];$$

но последний предел в силу леммы 4 (VIII) равен $F(x_0, y_0, z_0)$. Наше замечание доказано.

§ 2. Решение задачи Коши.

Перейдём к интересующему нас решению уравнения (VIII.2). С самого начала мы предположим, что решение u имеет непрерывные производные до второго порядка по координатам и производную первого порядка по времени. Пусть как u, так и её первые производные ограничены.

Применим формулу Грина (V.16) к неизвестному нам решению и функции v, за область интегрирования возьмём шар Ω, ограниченный сферой S. Мы получим:

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\,\Delta v-v\,\Delta u)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{S}\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)dS. \quad \text{(VIII.11)}$$

Очевидно, далее:

$$\int\limits_0^{t_0}\left\{\iiint\limits_{\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial u}{\partial t}\right)d\Omega\right\}dt=\iiint\limits_{\Omega} uv\,\Big|_0^{t_0}d\Omega.$$

Сопоставляя эту формулу с (VIII.11), получим:

$$\int_0^{t_0} \left\{ \iiint_\Omega \left[u\left(\Delta v + \frac{\partial v}{\partial t}\right) - v\left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t}\right) \right] d\Omega \right\} dt =$$

$$= \iiint_\Omega uv \Big|_0^{t_0} d\Omega + \int_0^{t_0} \left\{ \iint_S \left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn} \right) dS \right\} dt. \qquad \text{(VIII.12)}$$

Подставляя в тождество (VIII.12), справедливое при любых u и v, наши функции, мы, в силу (VIII.2) и (VIII.4), будем иметь:

$$\int_0^{t_0} \left\{ \iint_S \left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn} \right) dS \right\} dt + \iiint_\Omega uv \Big|_0^{t_0} d\Omega =$$

$$= -\int_0^{t_0} \left\{ \iiint_\Omega vf(x, y, z, t)\, d\Omega \right\} dt. \qquad \text{(VIII.13)}$$

Отметим, что интегралы вида: $\int\limits_0^{t_0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} vF(x, y, z, t)\, d\Omega \right\} dt$, абсолютно сходятся, если $F(x, y, z, t)$ — непрерывная ограниченная функция. В самом деле,

$$\int_0^{t_0} \left\{ \iiint_\Omega |vF(x, y, z, t)|\, d\Omega \right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{t_0} \left\{ \iiint_\Omega \max |F(x, y, z, t)|\, v\, d\Omega \right\} dt \leqslant \max |F(x, y, z, t)|\, t_0.$$

Мы будем пока предполагать, что $f(x, y, z, t)$ и $\varphi(x, y, z)$ — непрерывные ограниченные функции.

Перейдём к пределу в формуле (VIII.13), устремляя радиус шара Ω к бесконечности. Интегралы по поверхности S пропадут, и мы получим, очевидно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv \Big|_0^{t_0} dx\, dy\, dz = -\int_0^{t_0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} vf(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz \right\} dt.$$

В силу замечания к лемме 4 (VIII)

$$\lim_{t \to t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv\, dx\, dy\, dz = u(x_0, y_0, z_0, t_0),$$

поэтому

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, z)\, v\Big|_{t=0} dx\,dy\,dz -$$

$$-\int\limits_{0}^{t_0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} vf(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\right\} dt. \qquad \text{(VIII.14)}$$

Формула (VIII.14) даёт выражение для решения нашей задачи. При выводе этой формулы мы предполагали, что решение задачи существует. Поэтому нам необходимо проверить, будет ли функция u, определяемая формулой (VIII.14), в самом деле удовлетворять уравнению (VIII.2) и начальному условию.

Полезно заметить, что уравнение (VIII.2), решённое нами для $t>0$, при начальном условии, заданном для $t=0$, может совсем не иметь решения для $t<0$. Во всяком случае решение (VIII.14), вообще говоря, при этом перестанет иметь смысл.

Очевидно, что уравнение (VIII.2) можно решить, если начальные данные задавать при $t=t_1$, а решение искать для значений $t>t_1$. Такое решение будет выражаться формулой, получающейся лёгким преобразованием формулы (VIII.14). Если бы мы изучали уравнение

$$\Delta\psi + \frac{\partial\psi}{\partial t} = f(x, y, z, t), \qquad \text{(VIII.15)}$$

то для него мы могли бы, наоборот, решать задачу Коши для $t<t_1$, если даны значения ψ при $t=t_1$. В самом деле, полагая $t_1 - t = \tau$, приведём уравнение (VIII.15) к виду

$$\Delta\bar\psi - \frac{\partial\bar\psi}{\partial\tau} = \bar f(x, y, z, \tau), \qquad \text{(VIII.16)}$$

причём начальные условия будут заданы при $\tau=0$.

При этом решение уравнения (VIII.16) будет иметь вид:

$$\bar\psi(x_0, y_0, z_0, \tau_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(x, y, z)\, v\big|_{\tau=0}\, dx\,dy\,dz -$$

$$-\int\limits_{0}^{\tau_0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v\bar f(x, y, z, \tau)\,dx\,dy\,dz\right\} d\tau, \qquad \text{(VIII.17)}$$

где

$$\bar\psi(x, y, z, \tau) = \psi(x, y, z, t_1 - \tau); \quad \bar f(x, y, z, \tau) = f(x, y, z, t_1 - \tau),$$

а

$$\psi_0(x, y, z) = \psi(x, y, z, t_1),$$

т. е. ψ_0 является заданной начальной функцией.

Из формулы (VIII.17) получим при этом

$$\psi(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$

$$= \frac{1}{(t_1 - t_0)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(x, y, z)\, e^{-\frac{r^2}{4(t_1-t_0)}} dx\, dy\, dz -$$

$$- \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{r^2}{4(t-t_0)}}}{(t-t_0)^{3/2}} f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz \right\} dt. \quad \text{(VIII.18)}$$

Мы проведём два доказательства того, что формула (VIII.14) даёт решение поставленной задачи. Одно для частного случая, когда $f(x, y, z, t) = 0$ (при этом доказательство получается чрезвычайно простое), а другое для общего случая.

При $f(x, y, z, t) = 0$ формула (VIII.14) даёт:

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{t_0^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{4t_0}} \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \quad \text{(VIII.19)}$$

Из леммы 4 (VIII) следует, что правая часть есть функция, которая обращается в $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ при $t_0 \to 0$. Кроме того, нетрудно убедиться, на основании общих теорем анализа, что интеграл этот можно сколько угодно раз дифференцировать по переменным x_0, y_0, z_0, t_0, если только $t_0 > 0$. Получим:

$$\Delta_0 u(x_0, y_0, z_0, t_0) - \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0, t_0)}{\partial t_0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Delta_0 v - \frac{\partial v}{\partial t_0} \right) \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

На основании леммы 1 (VIII) видим, что $u(x_0, y_0, z_0, t_0)$ удовлетворяет уравнению (VIII.2) при $f(x, y, z, t) = 0$, что и требовалось доказать. Единственность гладких решений, т. е. решений, обладающих нужным числом непрерывных производных, вытекает прямо из тех рассуждений, которые привели нас к формуле (VIII.14). Итак, формула (VIII.14) при $f = 0$ даёт решение задачи.

Переходим к доказательству в общем случае.

Установим сначала, что функция u, даваемая формулой (VIII.14), имеет непрерывные производные до некоторого определённого порядка. В самом деле, заменяя переменные интегрирования:

$$\xi = x - x_0,\ \eta = y - y_0,\ \zeta = z - z_0,\ \tau = t_0 - t,$$

формулу (VIII.14) можно переписать так:

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{t_0^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{4t_0}} \times$$

$$\times \varphi(x_0+\xi, y_0+\eta, z_0+\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times e^{-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{4\tau}} f(x_0+\xi, y_0+\eta, z_0+\zeta, t_0-\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau.$$

Эту формулу, как доказывается в курсах анализа (см. § 2 (VII)), можно уже дифференцировать по параметру по крайней мере столько же раз, сколько ограниченных производных имеют функции f и φ, ибо интегралы от производных подинтегральной функции сходятся равномерно. Мы будем предполагать, что функции f и φ, обладают необходимым числом непрерывных, ограниченных производных.

Заметим далее, что легко свести общую задачу интегрирования уравнения (VIII.2) при нашем начальном условии к тому случаю, когда начальные значения u равны нулю. Для этого достаточно сделать подстановку $u = \varphi + w$.

Новая функция w будет удовлетворять уравнению

$$\Delta w - \frac{\partial w}{\partial t} = f(x, y, z, t) - \Delta\varphi$$

того же типа, что и уравнение (VIII.2).

Нам нужно доказать, что уравнение имеет решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям. При этом $w + \varphi$ будет решением общей задачи Коши для (VIII.2).

Заметив это, мы можем ограничиться рассмотрением нашей задачи, полагая $\varphi = 0$. Проверим, будет ли при этом формула (VIII.14) давать решение, удовлетворяющее нашим условиям. Условие $u|_{t_0=0} = 0$ проверяется легко.

Правая часть (VIII.14) даёт функцию

$$-\int\limits_0^{t_0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} vf(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz \right\} dt,$$

которая обращается в нуль при $t_0 = 0$.

В самом деле,

$$\left|\int_0^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} vf(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max|f|\int_0^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v\,dx\,dy\,dz\,dt = t_0\max|f|,$$

что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим произвольную функцию $\psi(x, y, z, t)$, непрерывную с производными до второго порядка и обращающуюся в нуль вне некоторой области, определяемой неравенствами:

$$\begin{cases} 0\leqslant t\leqslant t_0, & \text{(VIII.20)}\\ (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\leqslant\eta^2. & \text{(VIII.21)}\end{cases}$$

За эту функцию можно взять, например:

$$\psi=\begin{cases} t^3(t_0-t)^3\left[\eta^2-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2-(z-z_1)^2\right]^3 f_1(x, y, z),\\ \text{если } 0\leqslant t\leqslant t_0,\ (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\leqslant\eta^2\\ 0, \text{ в остальном пространстве.}\end{cases}$$

Простая проверка показывает, что при этом все условия выполняются, если f_1 дифференцируема два раза по своим аргументам.

Пусть

$$\rho(x, y, z, t)=\Delta\psi+\frac{\partial\psi}{\partial t}. \qquad \text{(VIII.22)}$$

Функция ψ обращается в нуль при $t=t_0$ и поэтому она есть решение задачи Коши для (VIII.22).

Мы можем на основании формулы (VIII.18) написать представление этой функции для $t_1<t_0$ в виде:

$$\psi(x_1, y_1, z_1, t_1)=-\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}}\int_{t_1}^{t_0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t-t_1)^{\frac{3}{2}}}\times\right.$$

$$\times e^{-\frac{r^2}{4(t-t_1)}}\rho(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt, \qquad \text{(VIII.23)}$$

где

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Умножим обе части (VIII.23) на f и проинтегрируем по всей той области, где $0 \leqslant t_1 \leqslant t_0$ и шару σ, определяемому неравенством (VIII.21). Заметим, что интегрирование по шару σ может быть заменено интегрированием по всему пространству x, y, z, ибо функции ψ и ρ вне σ равны нулю.

$$\int_0^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_1, y_1, z_1, t_1) f(x_1, y_1, z_1, t_1)\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dt_1 =$$

$$= -\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}}\int_0^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{t_1}^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t-t_1)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{r_1^2}{4(t-t_1)}}\times\right.$$

$$\left.\times\, \rho(x, y, z, t) f(x_1, y_1, z_1, t_1)\, dx\, dy\, dz\, dt\right] dx_1\, dy_1\, dz_1\, dt_1.$$

Переставляя справа порядок интегрирования, получим:

$$\int_0^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_1, y_1, z_1, t_1) f(x, y, z, t)\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dt =$$

$$= \int_0^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y, z, t)\left\{-\frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}}\int_0^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, y_1, z_1, t_1)\times\right.$$

$$\left.\times\, \frac{1}{(t-t_1)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{r_1^2}{4(t-t_1)}}\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dt_1\right\} dx\, dy\, dz\, dt =$$

$$= \int_0^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y, z, t)\, u(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz\, dt. \qquad \text{(VIII.24)}$$

Здесь через u обозначен внутренний интеграл, который, очевидно, совпадает с предполагаемым решением уравнения (VIII.2).

Считая, что u имеет вторые производные (это обстоятельство всегда будет иметь место при некоторых ограничениях на f), мы можем подставить вместо ρ его выражение из (VIII.22) и воспользоваться тождеством (VIII.12). Тогда, принимая во внимание, что $\psi|_S = 0$, $\psi|_{t=0} = 0$ и $\psi|_{t=t_0} = 0$, получим формулу:

$$\int_0^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho u\,dx\,dy\,dz\,dt = \int_0^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Delta\psi + \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) u\,dx\,dy\,dz\,dt =$$

$$= \int_0^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t}\right) dx\,dy\,dz\,dt. \qquad \text{(VIII.25)}$$

Из (VIII.24) и (VIII.25) следует:

$$\int_0^{t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - f\right) dx\,dy\,dz\,dt = 0.$$

Благодаря произволу выбора ψ мы видим, что u удовлетворяет нашему уравнению. Теорема доказана.

Вопрос о корректности постановки нашей задачи Коши сразу решается анализом формулы (VIII.14).

Очевидно, что малые изменения φ или f мало влияют на решение.

Мы вернёмся позднее к доказательству единственности решения задачи.

Пока что отметим одно важное обстоятельство.

Решение задачи Коши, рассмотренное нами, есть функция, непрерывно дифференцируемая сколь угодно много раз по x_0, y_0, z_0, вне зависимости от того, будет ли иметь производные функция φ или нет.

Эта гладкость решений существенно отличает уравнение распространения тепла, например, от уравнения колебаний струны, а значит, и от волнового уравнения.

В самом деле, уже простейшее решение Даламбера

$$u = \varphi(x - at)$$

уравнения колебаний струны может быть не дифференцируемо более двух раз по x и t. Эта же функция является решением и волнового уравнения с двумя и тремя независимыми переменными, так как, очевидно, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Следовательно, решения этих уравнений также не более гладки, чем начальные условия.

Мы разобрали решение уравнения (VIII.2) в пространстве трёх измерений. Совершенно аналогично можно было бы рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, y, t). \qquad \text{(VIII.26)}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}+f(x, t). \qquad \text{(VIII.27)}$$

Не останавливаясь на рассуждениях, которые в этом случае полностью совпадают с рассуждениями для трёхмерного случая, мы приведём окончательный результат.

Для уравнения (VIII.26) основное (фундаментальное) решение будет иметь вид:

$$v=\frac{1}{4\pi(t_0-t)}e^{-\frac{r^2}{t_0-t}}, \qquad \text{(VIII.28)}$$

где $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$, и решение уравнения (VIII.26) при условии

$$u|_{t=0}=\varphi(x, y)$$

имеет вид:

$$u(x_0, y_0, t_0)=\frac{1}{4\pi t_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{4t_0}}\varphi(x, y)\,dx\,dy-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{t_0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t_0-t}e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}f(x, y, t)\,dx\,dy\right\}dt. \qquad \text{(VIII.29)}$$

Точно так же для уравнения (VIII.27) основное решение будет иметь вид:

$$v=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0-t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4(t_0-t)}},$$

а решение (VIII.27) при условии $u|_{t=0}=\varphi(x)$ будет иметь вид:

$$u(x_0, t_0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_0}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t_0}}\varphi(x)\,dx-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{t_0}\frac{1}{\sqrt{t_0-t}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4(t_0-t)}}f(x, t)\,dx\right\}dt. \qquad \text{(VIII.30)}$$

Проверить справедливость всех этих формул мы предоставляем слушателям.

ЛЕКЦИЯ IX.

УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА.

§ 1. Теорема максимума.

Мы видели, что целый ряд вопросов математической физики сводится к решению тех или иных уравнений эллиптического типа. Мы займёмся сейчас простейшими такими уравнениями: уравнением Лапласа

$$\Delta u(x, y, z) = 0 \tag{IX.1}$$

и уравнением Пуассона

$$\Delta u(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z). \tag{IX.2}$$

Всякая функция, имеющая непрерывные вторые производные и удовлетворяющая в некоторой области уравнению Лапласа, называется *гармонической* функцией в этой области.

Прежде чем переходить к решению задач, связанных с этими уравнениями, мы займёмся изучением некоторых общих свойств, которыми обладают решения этих уравнений.

Справедлива лемма.

Лемма 1. Если функция $\rho(x, y, z)$ положительна в точке (x_0, y_0, z_0), то решение уравнения (IX.2) не может достигать минимума в этой точке.

В самом деле, если бы в этой точке функция $u(x, y, z)$, удовлетворяющая уравнению (IX.2), достигала бы минимума, то $u(x, y, z)$ достигала бы минимума в этой точке по каждому переменному в отдельности.

Но тогда все первые производные от u должны были бы быть равными нулю в этой точке, а вторые производные по каждому переменному — неотрицательными. Следовательно, сумма вторых производных должна была бы быть также неотрицательной, что противоречит условию

$$\rho(x_0, y_0, z_0) > 0.$$

Лемма доказана.

Следствие. Если $\rho(x, y, z)$ отрицательна в точке (x_0, y_0, z_0), то u в этой точке не может достигать максимума.

§ 2. Фундаментальное решение. Формула Грина.

Для того чтобы исследовать более глубоко свойства гармонических функций, докажем ещё несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2. Функция

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\frac{1}{r}=0 \tag{IX.3}$$

везде, кроме точки $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, где $\frac{1}{r}$ обращается в ∞.

В самом деле,

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-x_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-y_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-z_0)^2}{r^5},$$

откуда и вытекает (IX.3).

Лемма 3. Если функция u непрерывна, имеет непрерывные производные первого и второго порядков везде в области Ω и на её границе, кроме, быть может, некоторых изолированных точек, причём первые производные ограничены во всей области, то имеет место формула:

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta u\,d\Omega=\iint\limits_{S}\left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}-\frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right)dS-4\pi u(x_0, y_0, z_0). \tag{IX.4}$$

Граница S области Ω удовлетворяет условиям § 1 (I). Будем сначала предполагать, что u всюду, вплоть до границы S области Ω, имеет непрерывные производные 2-го порядка.

Для доказательства вырежем из области Ω шар ω радиуса ε с центром в точке (x_0, y_0, z_0) и применим к оставшейся области формулу Грина. Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u \, d\Omega = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\Omega-\omega} \frac{1}{r} \Delta u \, d\Omega = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\Omega-\omega} \left(\frac{1}{r} \Delta u - u\Delta \frac{1}{r}\right) d\Omega =$$

$$= \iint\limits_{S} \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right) dS + \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{\sigma} \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right) dS, \qquad (IX.5)$$

где σ — поверхность шара ω.

Нетрудно видеть, что на поверхности σ

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \frac{d\frac{1}{r}}{dr} = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{\varepsilon^2},$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_{\sigma} u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS = -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{\sigma} u \, dS =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{\sigma} u(x_0, y_0, z_0) \, dS - \frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{\sigma} \eta \, dS,$$

где η стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, т. е.

$$|\eta| < \delta(\varepsilon), \text{ где } \delta(\varepsilon) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0;$$

$$\iint\limits_{\sigma} u(x_0, y_0, z_0) \, dS = 4\pi\varepsilon^2 u(x_0, y_0, z_0); \left| \iint\limits_{\sigma} \eta \, dS \right| \leqslant \delta(\varepsilon) 4\pi\varepsilon^2.$$

В силу ограниченности $\frac{du}{dn}$ имеем $\left|\frac{du}{dn}\right| < k$, и, следовательно,

$$\left| \iint\limits_{\sigma} \frac{1}{r} \frac{du}{dn} dS \right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \iint\limits_{\sigma} k \, dS \leqslant 4\pi k\varepsilon$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{\sigma} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} u \, dS = -4\pi u(x_0, y_0, z_0).$$

Подставляя это выражение в (IX.5), получим нужную формулу (IX.4). Формула (IX.4) выведена в предположении, что точка (x_0, y_0, z_0) принадлежит области Ω. Если же точка (x_0, y_0, z_0) лежит вне Ω, то формула (IX.4) записывается так:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u \, d\Omega = \iint\limits_{S} \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right) dS. \qquad (IX.6)$$

Название формулы Грина часто относят к формулам (IX.4) и (IX.6).

Весь вывод, проведённый нами, без труда переносится и на случай, когда в области имеется конечное число точек разрыва производных, удовлетворяющих условиям теоремы.

Легко заметить аналогию между формулой Грина (IX.4) и сходной формулой (лекция VIII), выведенной нами для уравнения теплопроводности. Роль рассмотренного там фундаментального решения уравнения теплопередачи играет здесь *функция $\frac{1}{r}$, которую называют фундаментальным решением уравнения Лапласа.*

§ 3. Потенциалы объёма, простого слоя и двойного слоя.

Если бы нам были известны, из каких-либо соображений, значения u, Δu и $\frac{du}{dn}$, входящие в формулу Грина (IX.4):

$$\Delta u = -4\pi\rho, \quad u\Big|_S = f_1, \quad \frac{du}{dn}\Big|_S = f_2,$$

то формула Грина дала бы нам явное представление для неизвестной функции u:

$$u = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho}{r}\, dx\, dy\, dz + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} f_1\, dS - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} \frac{1}{r} f_2\, dS. \qquad \text{(IX.7)}$$

Однако, как правило, мы не можем задать произвольно f_1 и f_2, и поэтому формула (IX.4) не даёт непосредственное решение задачи, хотя мы и используем её неоднократно.

В правой части этой формулы находятся интегралы, которым мы дадим особые названия.

Интеграл $\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho}{r}\, dx\, dy\, dz$ мы будем называть ньютоновым потенциалом, а функцию ρ — плотностью этого потенциала. Аналогично $\iint\limits_{S} \frac{f_2}{r}\, dS$ мы назовём потенциалом простого слоя с плотностью f_2, а $\iint\limits_{S} f_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, dS$ — потенциалом двойного слоя с плотностью f_1.

Ньютонов потенциал имеет очень простой физический смысл.

Представим себе некоторые массы, распределённые в объёме Ω с плотностью ρ. Подсчитаем притяжение этой массой материальной точки. По закону Ньютона масса m, расположенная в точке (x, y, z), притягивает единичную массу, расположенную в точке (x_0, y_0, z_0) с силой F, направленной к точке (x, y, z) и равной $\frac{m}{r^2}$. Иначе говоря,

$$F = \operatorname{grad}_0 U, \text{ где } U = \frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

Функция U, градиент которой равен притягивающей силе, называется потенциалом силы тяжести. Поэтому $\frac{m}{r}$ можно назвать ньютоновым потенциалом точки.

Разбивая весь объём Ω на маленькие кусочки и заменяя влияние массы $\rho\,\Delta\Omega$, сосредоточенной в каждом таком объёме, влиянием равной массы, сосредоточенной в некоторой средней точке, мы получим выражение для силы F, действующей на единичную массу, сосредоточенную в точке (x_0, y_0, z_0), в виде

$$F = \sum \operatorname{grad}_0 \frac{1}{r_\xi}\,\rho\,\Delta\Omega,$$

где $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r_\xi}$ является значением $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r}$ в некоторой средней точке объёма $\Delta\Omega$.

Переходя к пределу, получим

$$F = \iiint\limits_\Omega \rho \operatorname{grad}_0 \frac{1}{r}\,d\Omega,$$

$$F_x = \iiint\limits_\Omega \rho\,\frac{x-x_0}{r^3}\,d\Omega,$$

$$F_y = \iiint\limits_\Omega \rho\,\frac{y-y_0}{r^3}\,d\Omega,$$

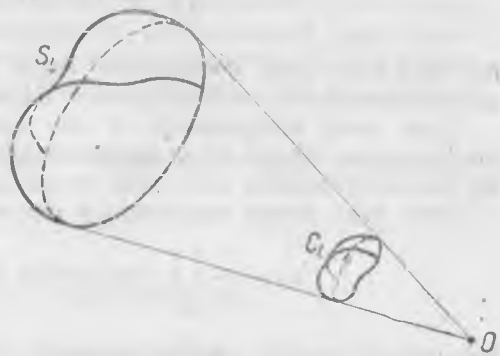
$$F_z = \iiint\limits_\Omega \rho\,\frac{z-z_0}{r^3}\,d\Omega.$$

Пусть $\rho(x, y, z)$ — непрерывная функция. Величины F_x, F_y, F_z представляются равномерно сходящимися интегралами и, в силу теоремы § 2 (VII), суть производные по (x_0, y_0, z_0) от функции $U = \iiint\limits_\Omega \frac{\rho}{r}\,d\Omega$ и, следовательно,

$$F = \operatorname{grad}_0 U.$$

Ту же интерпретацию допускает и потенциал простого слоя. Это будет потенциал тяготения масс, распределённых на поверхности S, создаваемый в точках вне поверхности. Если ρ — плотность этих масс, то, заменяя действие каждого куска ΔS поверхности в точке (x_0, y_0, z_0) через $\mathrm{grad}_0 \frac{1}{r} f_2 \Delta S$, где $\mathrm{grad}_0 \frac{1}{r_1}$ обозначает значение $\mathrm{grad}_0 \frac{1}{r}$ в некоторой средней точке, складывая и переходя к пределу, получим для силы тяготения в точке (x_0, y_0, z_0) выражение $F = \mathrm{grad}_0 U$, $U = \iint\limits_S \frac{f_2}{r} dS$, что и требовалось доказать.

Мы считали ρ и f_2 плотностью масс, тяготеющих по закону Ньютона, но также можно было бы провести вывод выражения для электрического потенциала, создаваемого зарядами, притягивающимися по закону Кулона или магнитного потенциала.



Черт. 11.

Перейдём к геометрическому смыслу потенциала двойного слоя. Наша задача будет состоять в том, чтобы представить этот интеграл в несколько иной форме.

Рассмотрим некоторую, вообще говоря, незамкнутую поверхность S. Построим вокруг начала координат сферу C радиуса 1.

Допустим, что поверхность S двусторонняя и назовём одну из её сторон внутренней, а другую внешней и тем самым определим направление её внешней и внутренней нормали во всех точках.

Пусть эта поверхность разбита на куски таким образом, чтобы каждый кусок встречался с радиусами-векторами, проведёнными из начала координат, не больше, чем в одной точке. Для каждого такого куска знак косинуса угла между внутренней нормалью и радиусом-вектором, проведённым из начала, будет постоянным. Пусть эти куски будут $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Проведём радиусы-векторы в каждую точку куска S_l. Эти радиусы в пересечении со сферой C образуют на ней область C_l (черт. 11).

Площадь этой области мы будем называть телесным углом, под которым внутренняя поверхность куска S_l видна из начала координат, и обозначать ω_{S_l}. Мы будем считать, что этот телесный угол положителен, если радиусы-векторы, направленные из начала в точку S_l, пересекаются с внутренней нормалью под тупым углом, т. е. если наблюдатель, стоящий в начале координат, действительно видит внутреннюю поверхность, и будем считать, что этот угол отрицателен, если наблюдатель видит внешнюю поверхность, и угол между радиусом-вектором из начала и внутренней нормалью S_l — острый.

Всё сказанное остаётся, очевидно, справедливым, если, кроме кусков указанного типа, при разбиении поверхности мы встретимся с кусками конических поверхностей с вершиной в начале. Телесный угол для таких кусков равен нулю.

Телесный угол для куска S_l будет, очевидно, в полярных координатах записываться так:

$$\omega_{S_l} = -\iint\limits_{S_l} \operatorname{sign}[\cos(r, n)] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

где $\operatorname{sign}[\cos(r, n)]$ обозначает знак косинуса угла между радиусом-вектором r и внутренней нормалью n.

Для всей поверхности S мы определим телесный угол ω, под которым видна её внутренняя сторона из начала, как сумму соответственных телесных углов для всех кусков S_l.

Этот угол будет выражаться интегралом

$$\omega_S = -\iint\limits_{S} \operatorname{sign}[\cos(r, n)] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \tag{IX.8}$$

Мы можем теперь сформулировать нашу лемму в виде формулы: Лемма 4.

$$\omega_S = \iint\limits_{S} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \, dS. \tag{IX.9}$$

Для доказательства заметим, что ω_S зависит только от контура, ограничивающего поверхность S, и не меняется при любых деформациях поверхности S, лишь бы контур l оставался неизменным и поверхность S в процессе её деформации не проходила через начало координат.

Интеграл (IX.9) также не зависит от поверхности S. В самом деле, разность интегралов

$$\iint\limits_{S_1} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS - \iint\limits_{S_2} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS,$$

где S_1 и S_2 имеют общий контур, есть интеграл по замкнутой поверхности S.

Имеем, далее,

$$\iint\limits_{S} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS = -\iiint\limits_{\Omega} \Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\Omega = 0,$$

ибо $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$, где Ω — область, ограниченная поверхностями S_1 и S_2.

Чтобы убедиться теперь в справедливости (IX.9), достаточно показать совпадение ω_S и интеграла (IX.9) для какого-нибудь одного типа поверхности S, ограниченной контуром l.

Возьмём, например, поверхность, состоящую из куска сферы C и куска L конической поверхности, составленной радиусами-векторами, проходящими через начало и контур l. Для обоих этих кусков справедливость (IX.9) очевидна, ибо на L имеет место равенство $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}=0$ вместе с равенством нулю телесного угла, а на C

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = -\frac{d\frac{1}{r}}{dr} = -\operatorname{sign}[\cos(r, n)],$$

и поэтому

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS = -\operatorname{sign}[\cos(r, n)] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Можно было бы установить справедливость (IX.9) и просто непосредственной выкладкой.

На основании совпадения интегралов (IX.8) и (IX.9) по любой поверхности легко заключаем, что

$$-\operatorname{sign}[\cos(r, n)] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS.$$

Мы будем обозначать иногда

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS = d\omega \tag{IX.10}$$

и называть $d\omega$ элементом телесного угла.

С помощью формулы (IX.10) потенциалу двойного слоя можно дать представление:

$$\iint_S f_1 \, d\omega. \tag{IX.11}$$

Это представление говорит о том, что если плотность f_1 потенциала двойного слоя равна единице, то этот потенциал выражает телесный угол, под которым видна поверхность S из точки (x_0, y_0, z_0).

ЛЕКЦИЯ X.

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ ФОРМУЛЫ ГРИНА.

§ 1. Теорема о среднем арифметическом.

Формула Грина (IX.4) в случае, когда u—гармоническая функция, принимает вид:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) dS. \tag{X.1}$$

Из этой формулы вытекает ряд следствий, которыми мы и займёмся.

Правая часть формулы (X.1) представляет собой сумму двух потенциалов соответственно простого и двойного слоя.

Их свойства будут подробно исследованы в дальнейшем. Покажем сейчас, что каждый из них есть гармоническая функция везде вне поверхности S.

В самом деле, если точка (x_0, y_0, z_0) не лежит на этой поверхности, то потенциалы простого и двойного слоя можно дифференцировать, и притом сколько угодно раз, по переменным x_0, y_0, z_0 под знаком интеграла. Поскольку $\frac{1}{r}$ есть гармоническая функция этих переменных, ибо мы видели, что $\Delta_0 \frac{1}{r} = 0$, то и потенциал простого слоя и потенциал двойного слоя будут гармоническими функциями вне S. Более того, функцию $\frac{1}{r}$ вблизи некоторой точки x_0^*, y_0^*, z_0^* можно разложить в ряд по степеням $x_0 - x_0^*$, $y_0 - y_0^*$, $z_0 - z_0^*$, равномерно сходящийся при достаточно малых значениях этих разностей.

Интегрируя этот ряд почленно, убеждаемся, что функции $v = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{du}{dn} \frac{1}{r} dS$ и $w = \frac{1}{4\pi} \iint_S u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS$ допускают такое разложение и, следовательно, являются аналитическими функциями x_0^*, y_0^*, z_0^* везде, кроме поверхности S.

Применим формулу Грина (X.1) к шару радиуса h, описанному вокруг точки (x_0, y_0, z_0), поверхность которого мы также обозначим буквой S. Мы получим:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(\frac{1}{h^2} u - \frac{1}{h} \frac{du}{dn} \right) dS.$$

Но

$$\iint\limits_S \frac{du}{dn} dS = \iiint\limits_\Omega \Delta u \, dx \, dy \, dz = 0,$$

где Ω — объём нашего шара.

Следовательно,

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi h^2} \iint\limits_S u \, dS = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\pi d\vartheta \int\limits_0^{2\pi} u(R, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\varphi, \quad \text{(X.2)}$$

где ϑ и φ — полярные координаты.

Формула (X.2) выразится в виде теоремы:

Теорема 1. Значение гармонической функции в центре некоторого шара равно среднему арифметическому её значений на поверхности [1]) этого шара.

Свойство гармонических функций, доказанное нами, можно считать вполне характеризующим этот класс. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если функция $u(x, y, z)$, непрерывная в области Ω, обладает тем свойством, что её значение в центре любого шара, лежащего целиком внутри Ω, равно среднему арифметическому её значений на поверхности шара, то эта функция имеет непрерывные производные второго порядка и

$$\Delta u = 0,$$

т. е. u есть гармоническая функция.

Докажем эту теорему.

Рассмотрим интеграл:

$$u^*(x_0, y_0, z_0) = \frac{A}{4\pi} \iiint\limits_{r \leq h} (h^2 - r^2)^4 u(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad \text{(X.3)}$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, а A — постоянная, которую мы вскоре подсчитаем.

---

[1]) Интеграл от некоторой функции, взятый по какой-либо линии, поверхности или объёму, делённый соответственно: на длину линии, площадь поверхности или величину объёма, называется средним арифметическим значением функции соответственно на линии, поверхности или объёме.

Вводя в правую часть равенства (X.3) полярные координаты, получим:

$$u^*(x_0, y_0, z_0) = A \int_0^h (h^2 - r^2)^4 r^2 dr \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi;$$

внутренний интеграл есть среднее арифметическое от $u(r, \vartheta \varphi)$ по сфере радиуса r и, значит:

$$u^*(x_0, y_0, z_0) = A \int_0^h (h^2 - r^2)^4 r^2 u(x_0, y_0, z_0) \, dr;$$

полагая

$$\frac{1}{A} = \int_0^h (h^2 - r^2)^4 r^2 dr = \frac{2^7 h^{11}}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11},$$

имеем

$$u^*(x_0, y_0, z_0) = u(x_0, y_0, z_0);$$

следовательно, функция u, как видно из формулы (X.3), обладает свойством

$$u(x_0, y_0, z_0) = \iiint_{\Omega} K(P, P_0) \, u(P) \, dx \, dy \, dz, \tag{X.4}$$

$$\text{где } K(P, P_0) = \begin{cases} \dfrac{(h^2 - r^2)^4 A}{4\pi}, & r \leqslant h, \\ 0, & r > h, \end{cases}$$

является функцией двух точек: $P(x, y, z)$ и $P_0(x_0, y_0, z_0)$, имеющей непрерывные производные первого, второго и третьего порядка по своим аргументам. Правую часть (X.4) можно, очевидно, три раза дифференцировать по x_0, y_0, z_0. Значит, и левая часть имеет непрерывные производные до 3-го порядка.

Разложим функцию $u(x, y, z)$ в ряд по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$. Мы получим:

$$u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0) + \sum_{m=1}^{2} \frac{1}{i!\,j!\,k!} \frac{\partial^m u}{\partial x^i \, \partial y^j \, \partial z^k}\bigg|_0 \times$$
$$\times (x - x_0)^i (y - y_0)^j (z - z_0)^k + \eta,$$

где $m=i+j+k$, а $|\eta|<Cr^3$, где C — постоянная. Проинтегрируем это выражение по сфере S радиуса $r=h$. Замечая, что

$$\iint_S (x-x_0)\,dS = \iint_S (y-y_0)\,dS = \iint_S (z-z_0)\,dS =$$
$$= \iint_S (x-x_0)(y-y_0)\,dS = \iint_S (y-y_0)(z-z_0)\,dS =$$
$$= \iint_S (z-z_0)(x-x_0)\,dS = 0$$

(подинтегральные функции на одной полусфере имеют значение, обратное по знаку соответствующим значениям на другой), а также

$$\iint_S (x-x_0)^2 dS = \iint_S (y-y_0)^2 dS = \iint_S (z-z_0)^2 dS =$$
$$= \frac{1}{3}\iint_S [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]\,dS = \frac{4}{3}\pi h^4,$$

получим:

$$\frac{1}{4\pi h^2}\iint_S u\,dS = u(x_0, y_0, z_0) + \frac{h^2}{6}\Delta u\,|_0 + \eta_1,$$

причём $|\eta_1|<Ch^3$.

Следовательно,

$$u(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{4\pi h^2}\iint_S u(x, y, z)\,dS = -\frac{h^2}{6}[\Delta u(x_0, y_0, z_0)+\varepsilon],$$

где ε стремится к нулю при h, стремящемся к нулю.

В силу условий теоремы левая часть равенства равна нулю, и, следовательно, имеем:

$$\Delta u(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Из формулы (X.2) вытекает следующая теорема:

Теорема 3. Если последовательность v_n-функций, гармонических в области Ω, сходится равномерно в этой области к предельной функции v, то этот предел есть в свою очередь гармоническая функция.

В самом деле, если каждая из функций v_n удовлетворяет равенству

$$v_n(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi h^2}\iint_S v_n\,dS,$$

где S—сфера радиуса $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=h$, то этому же равенству удовлетворяет и предельная функция. Следовательно, v—гармоническая функция в Ω, что и требовалось доказать. Отсюда следует, между прочим, что интеграл по параметру от гармонической функции представляет собою гармоническую функцию.

§ 2. Поведение гармонической функции вблизи особой точки.

Пусть функция u имеет особую точку в области Ω, но в окрестности этой особой точки является гармонической. Займёмся исследованием её поведения вблизи такой особой точки. Для простоты предположим, что этой точкой служит начало координат.

Преобразуем функцию u к полярным координатам, тогда $u=u(R, \vartheta, \varphi)$.

Лемма 1. Если функция u удовлетворяет неравенствам:

$$|u|\leqslant\frac{A}{R^n}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial R}\right|\leqslant\frac{A}{R^{n+1}},$$

где A—постоянная, а $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и является гармонической функцией в Ω за исключением начала координат, то функция u в Ω имеет представление:

$$u(x_0, y_0, z_0)=\sum_{m=0}^{n-1} a_{ijk}\frac{\partial^m \frac{1}{R}}{\partial x^i\partial y^j\partial z^k}+u^*(R, \vartheta, \varphi), \qquad (X.5)$$

где u^*—функция, гармоническая во всём шаре, включая точку $(0, 0, 0)$.

Доказательство этого факта следует непосредственно из формулы Грина (X.1). Окружив точку $(0, 0, 0)$ малой сферой $\sum'$, ограничивающей шар σ с центром в начале, получим:

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn}u-\frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right)dS+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma'}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn}u-\frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right)dS.$$

Вблизи точки $x=0$, $y=0$, $z=0$ функцию $\frac{1}{r}$ по формуле Маклорена можно представить в виде

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R_0}+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{i!\,j!\,k!}x^iy^jz^k\left.\frac{\partial^m\frac{1}{r}}{\partial x^i\partial y^j\partial z^k}\right|_0+R_n,$$

где

$$m = i + j + k, \quad \text{а} \quad R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2},$$

причём $|R_n| < CR^n$, где C — постоянная. Пользуясь тем, что

$$\left.\frac{\partial^m \frac{1}{r}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}\right|_0 = (-1)^m \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i \partial y_0^j \partial z_0^k},$$

получим:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^m}{i!\,j!\,k!} x^i y^j z^k \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i \partial y_0^j \partial z_0^k} + R_n. \tag{X.6}$$

Аналогично $\dfrac{d\frac{1}{r}}{dn}$ также представляется линейной комбинацией производных от $\frac{1}{R_0}$ по x_0, y_0, z_0 с коэффициентами, не зависящими от x_0, y_0, z_0, и остатком R_n'; $|R_n'| < C_1 R^{n-1}$. Это следует из того, что формулу (X.6) можно дифференцировать по x, y, z сколько угодно раз.

Отсюда получим:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} u - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) dS + \frac{a_0^{(\Sigma')}}{R_0} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk}^{(\Sigma')} \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i \partial y_0^j \partial z_0^k} + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma'} \left(R_n' u - R_n \frac{du}{dn} \right) dS,$$

где $a_{ijk}^{(\Sigma')}$ — некоторые числа.

Перейдём к пределу при $\sum' \to 0$. Предел интеграла, взятого по $\sum'$, будет, в силу условий леммы, очевидно, равен нулю, а первое слагаемое правой части есть гармоническая функция от x_0, y_0, z_0, не зависящая от $\sum'$ (сумма потенциалов простого и двойного слоя).

Отсюда следует, что и сумма

$$\frac{a_0^{(\Sigma')}}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk}^{(\Sigma')} \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i \partial y_0^j \partial z_0^k} \tag{X.7}$$

должна стремиться к некоторому пределу $\Phi(x_0, y_0, z_0) = \Phi(P_0)$. Докажем, что этот предел должен выражаться в виде

$$\frac{a_0}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk} \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i \partial y_0^j \partial z_0^k}. \tag{X.8}$$

Для этого достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ — некоторые функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (k — конечное число). Если линейная комбинация этих функций с переменными коэффициентами, не зависящими от $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\varphi^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} y_i^{(m)} \varphi_i(x_1, \ldots, x_n),$$

сходится при $m \to \infty$, то её предел $\varphi^{(0)}$ есть снова линейная комбинация тех же функций φ_i.

В самом деле, функция $\varphi^{(m)}$ не может, очевидно, принимать независимые произвольные значения во всём пространстве, так как, приписывая ей какое-либо значение в некоторой точке $P_0^{(s)}$, мы получим некоторое линейное уравнение, которому должны удовлетворять числа $y_i^{(m)}$.

Число таких линейно независимых уравнений не больше, чем k; поэтому можно указать N таких точек $P_0^{(1)}, \ldots, P_0^{(N)}$ $(N \leqslant k)$, что значение функции $\varphi^{(m)}$ в любой точке P определяется вполне через эти значения:

$$\varphi^{(m)}(P) = \sum_{s=1}^{N} \varphi^{(m)}(P_0^{(s)}) \psi_s(P), \tag{X.9}$$

где $\psi_s(P)$ — линейные комбинации φ_i с выбранными коэффициентами.

Обратно, всякая функция, удовлетворяющая уравнению (X.9), представима в виде линейной комбинации φ_i.

Отсюда следует наша лемма. Если перейти к пределу в равенстве (X.9), то мы видим, что $\varphi^{(0)}$ должна удовлетворять уравнению

$$\varphi^{(0)}(P) = \sum_{s=1}^{N} \varphi^{(0)}(P_0^{(s)}) \psi_s(P),$$

и, значит, $\varphi^{(0)}$ есть линейная комбинация $\varphi_i(P)$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. Представление (X.5) имеет место, если удовлетворено неравенство

$$|u| < \frac{A}{R^n}.$$

Введём вместо $u(R, \vartheta, \varphi)$ вспомогательную функцию

$$v(R, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{R^{n+1}} \int_0^R u(R_1, \vartheta, \varphi) R_1^n \, dR_1; \tag{X.10}$$

интеграл в правой части равномерно сходится. Его можно представить в виде:

$$v(R, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{R^{n+1}} \int_0^1 u(R\xi, \vartheta, \varphi) R^n \xi^n d(R\xi) =$$

$$= \int_0^1 u(R\xi, \vartheta, \varphi) \xi^n d\xi = \int_0^1 u(\xi x, \xi y, \xi z) \xi^n d\xi,$$

откуда ясно, что v является интегралом от гармонической функции и, следовательно, в свою очередь гармонична.

Очевидно,

$$\frac{\partial v(R, \vartheta, \varphi)}{\partial R} = -\frac{n+1}{R^{n+2}} \int_0^R u(R_1, \vartheta, \varphi) R_1^n dR_1 + \frac{u(R, \vartheta, \varphi)}{R}. \quad (X.11)$$

Из формул (X.10) и (X.11) следует:

$$|v| \leqslant \frac{1}{R^{n+1}} \int_0^R A \, dR_1 = \frac{A}{R^n},$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial R}\right| \leqslant \frac{n+1}{R^{n+2}} \int_0^R A \, dR_1 + \frac{A}{R^{n+1}} = \frac{A(n+2)}{R^{n+1}}.$$

Следовательно, к функции v применимы все условия леммы 1 (X) и v представима в виде

$$v = \frac{a_0}{R_0} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk} \frac{\partial^m \frac{1}{R_0}}{\partial x_0^i \, \partial y_0^j \, \partial z_0^k} + w(R_0, \vartheta, \varphi),$$

где w — гармоническая в шаре функция.

Функция u может быть получена из v с помощью простых выкладок:

$$u(R, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{R^n} \frac{\partial}{\partial R} [R^{n+1} v(R, \vartheta, \varphi)] =$$

$$= (n+1) v(R, \vartheta, \varphi) + x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Принимая во внимание, что $\psi_{ijk} = \dfrac{\partial^m \frac{1}{R}}{\partial x^i \, \partial y^j \, \partial z^k}$ есть однородная функция измерения $-(m+1)$, следовательно,

$$x \frac{\partial \psi_{ijk}}{\partial x} + y \frac{\partial \psi_{ijk}}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_{ijk}}{\partial z} = -(m+1) \psi_{ijk},$$

и замечая, что выражение $x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+z\frac{\partial w}{\partial z}$ является гармонической функцией, убеждаемся в справедливости нашей теоремы.

Следствие. Если в окрестности начала координат функция $u(x, y, z)$ ограничена и является гармонической везде, кроме, быть может, начала, то её можно превратить в гармоническую, выбрав соответственным образом $u(0, 0, 0)$.

Функция u в окрестности начала совпадает с гармонической функцией w. Следовательно, она может не быть гармонической лишь потому, что $u(0, 0, 0)$ не равно $w(0, 0, 0)$; отсюда и вытекает наше утверждение. Очевидно, что роль начала координат может играть любая точка.

§ 3. Поведение гармонической функции на бесконечности. Взаимные точки.

Функция $\frac{1}{r}$ может быть преобразована к некоторому виду, весьма удобному в дальнейшем. Займёмся этим преобразованием:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2(xx_0+yy_0+zz_0)+x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=$$

$$=\frac{1}{RR_0}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_0^2}-2\frac{xx_0+yy_0+zz_0}{R^2R_0^2}+\frac{1}{R^2}}},$$

где

$$R^2=x^2+y^2+z^2,\quad R_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2,$$

откуда

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{RR_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{R^2}-\frac{x_0}{R_0^2}\right)^2+\left(\frac{y}{R^2}-\frac{y_0}{R_0^2}\right)^2+\left(\frac{z}{R^2}-\frac{z_0}{R_0^2}\right)^2}}.$$

Обозначим

$$\frac{x}{R^2}=\xi,\quad \frac{y}{R^2}=\eta,\quad \frac{z}{R^2}=\zeta,$$

$$\frac{x_0}{R_0^2}=\xi_0,\quad \frac{y_0}{R_0^2}=\eta_0,\quad \frac{z}{R^2}=\zeta_0.$$

Точку (ξ, η, ζ) мы будем называть взаимной с точкой (x, y, z). Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{P}^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{1}{R^2},\quad x=\frac{\xi}{\mathrm{P}^2},\quad y=\frac{\eta}{\mathrm{P}^2},\quad z=\frac{\zeta}{\mathrm{P}^2}.$$

Точка, взаимная с данной, лежит на том же луче, проходящем через начало и данную точку, на расстоянии от начала, обратном расстоянию данной.

Обозначая

$$\rho = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2+(\zeta-\zeta_0)^2},$$
$$\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \mathrm{P},$$
$$\sqrt{\xi_0^2+\eta_0^2+\zeta_0^2} = \mathrm{P}_0,$$

получим:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{RR_0}\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{PP}_0}{\rho}. \tag{X.12}$$

Из этой формулы вытекает важная для применений теорема.

Теорема 5. Если функция $u(R, \vartheta, \varphi)$ — гармоническая в некоторой области, то и функция

$$\frac{1}{\mathrm{P}}\, u\left(\frac{1}{\mathrm{P}}, \vartheta, \varphi\right) = v(\mathrm{P}, \vartheta, \varphi)$$

также гармоническая в соответствующей области. Иными словами, $\frac{1}{\mathrm{P}}\, u\left(\frac{1}{\mathrm{P}}, \vartheta, \varphi\right)$ есть гармоническая функция от ξ, η, ζ.

В самом деле, по формуле Грина (X.1) всякая гармоническая функция $u(x, y, z)$ представляется суммой потенциалов простого и двойного слоя

$$u(R_0, \vartheta_0, \varphi_0) = \iint_S \mu \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, dS + \iint_S \nu \frac{1}{r}\, dS,$$

где

$$\mu = \frac{1}{4\pi} u\Big|_S, \quad \text{а} \quad \nu = -\frac{1}{4\pi}\frac{du}{dn}\Big|_S.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\mathrm{P}_0} u = R_0 u = \iint_S \mu \frac{d\frac{R_0}{r}}{dn}\, dS + \iint_S \nu \frac{R_0}{r}\, dS; \tag{X.13}$$

но $\frac{R_0}{r} = \frac{1}{R\rho}$ есть гармоническая функция ξ_0, η_0, ζ_0, а значит, интегралы (X.13) — также гармоническая функция этих переменных, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если гармоническая вне некоторого шара функция удовлетворяет неравенству

$$|u| < AR^{n-1}, \tag{X.14}$$

то эта функция представима в виде:

$$u = a_0 + \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk} R^{2m+1} \frac{\partial^{i+j+k} \frac{1}{R}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} + u^*, \tag{X.15}$$

$$i + j + k = m,$$

где u^* — гармоническая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности.

В самом деле, если для u имеет место неравенство (X.14), то для функции $v(\mathrm{P}, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{\mathrm{P}} u\left(\frac{1}{\mathrm{P}}, \vartheta, \varphi\right)$ имеет место оценка

$$|v| < \frac{A}{\mathrm{P}^n}.$$

Но по доказанной ранее теореме 4 (X)

$$v(\mathrm{P}, \vartheta, \varphi) = \frac{a_0}{\mathrm{P}} + \sum_{m=1}^{n-1} a_{ijk} \frac{\partial^m \frac{1}{\mathrm{P}}}{\partial \xi^i \partial \eta^j \partial \zeta^k} + v^*(\mathrm{P}, \vartheta, \varphi). \tag{X.16}$$

Функция $\dfrac{\partial^m \frac{1}{\mathrm{P}}}{\partial \xi^i \partial \eta^j \partial \zeta^k}$ есть однородная функция измерения $-(m+1)$ от ξ, η, ζ. Следовательно,

$$\mathrm{P}^{m+1} \frac{\partial^m \frac{1}{\mathrm{P}}}{\partial \xi^i \partial \eta^j \partial \zeta^k}$$

есть однородная функция нулевого измерения от ξ, η, ζ и зависит только от отношений этих величин. Но ξ, η, ζ пропорциональны x, y, z; следовательно,

$$\mathrm{P}^{m+1} \frac{\partial^m \frac{1}{\mathrm{P}}}{\partial \xi^i \partial \eta^j \partial \zeta^k} = R^{m+1} \frac{\partial^m \frac{1}{R}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k},$$

откуда

$$\frac{\partial^m \frac{1}{\mathrm{P}}}{\partial \xi^i \partial \eta^j \partial \zeta^k} = R^{2m+2} \frac{\partial^m \frac{1}{R}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}. \tag{X.17}$$

Подставляя (X.17) в (X.16) и пользуясь тем, что $u = \frac{1}{R} v$, получим (X.15). Наше утверждение доказано.

Из формулы (X.15) вытекает одно важное следствие.

Следствие 2. Функция u, гармоническая вне шара и ограниченная там, стремится на бесконечности к определённому постоянному пределу.

ЛЕКЦИЯ XI.

УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ. НЬЮТОНОВ ПОТЕНЦИАЛ.

Переходим к исследованию уравнения Пуассона в неограниченной среде.

Лемма 1. Функция, гармоническая во всём пространстве и стремящаяся к нулю на бесконечности, есть тождественный нуль.

В самом деле, применяя теорему 1 (IX) к сколь угодно большому шару, видим, что в любой точке пространства значение нашей гармонической функции сколь угодно мало. Отсюда и вытекает наше утверждение.

Следствие. Решение уравнения Пуассона

$$\Delta v = -4\pi\rho(x, y, z) \tag{XI.1}$$

в неограниченном пространстве, стремящееся к нулю на бесконечности, единственно.

В самом деле, если v_1 и v_2 — два таких решения, то их разность

$$v_1 - v_2$$

есть гармоническая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. По предыдущему она — тождественный нуль.

Переходим теперь к решению уравнения Пуассона (XI.1) в неограниченном пространстве.

Пусть функция $\rho(x, y, z)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left.\begin{aligned} &|\rho(x, y, z)| < \frac{A}{R^{2+\alpha}}, \quad \text{если } R \geqslant 1, \\ \text{и}\quad &|\rho(x, y, z)| < A, \qquad\qquad R < 1, \end{aligned}\right\} \tag{XI.2}$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{и} \quad \alpha > 0.$$

При выполнении условий (XI.2) решение уравнения (XI.1) легко построить с помощью формулы Грина (IX.4).

Пусть $u(x_0, y_0, z_0)$ — какое-нибудь решение (XI.1).

Взяв произвольный объём Ω, ограниченный поверхностью S, мы имеем на основании этой формулы:

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}(-4\pi\rho)\frac{1}{r}\,dx\,dy\,dz +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}u\,dS - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{r}\frac{du}{dn}dS =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}u\,dS - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{1}{r}\frac{du}{dn}dS, \qquad \text{(XI.3)}$$

где r, как обычно, — расстояние между точкой (x, y, z) и точкой (x_0, y_0, z_0).

Предположим на минуту, что искомое решение таково, что оно само стремится к нулю на бесконечности, а первые его производные стремятся к нулю, даже будучи помножены на r. При этом, выбрав за Ω шар радиуса R с центром в начале координат, мы можем перейти к пределу, устремляя R к бесконечности.

Мы получим:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \lim_{R\to\infty}\left[\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}u\frac{dS}{r^2} - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}r\frac{du}{dn}\frac{dS}{r^2}\right].$$

Второе и третье слагаемые стремятся, очевидно, к нулю, так как

$$\left|\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{u\,dS}{r^2}\right| \leqslant \frac{\max|u|_s}{4\pi}\frac{4\pi R^2}{(R-R_0)^2}$$

и

$$\left|\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}r\frac{du}{dn}\frac{dS}{r^2}\right| \leqslant \max\left|r\frac{du}{dn}\right|_S\frac{1}{4\pi}4\pi\frac{R^2}{(R-R_0)^2},$$

где

$$R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2};$$

следовательно, первое слагаемое также имеет предел, и предел этот равен $u(x_0, y_0, z_0)$.

Мы докажем, что функция

$$u(x_0, y_0, z_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz, \tag{XI.4}$$

где тройной интеграл распространён на всё пространство, действительно удовлетворяет уравнению (XI.4) и поставленным условиям.

Функция (XI.4) называется ньютоновым потенциалом, а $\rho(x, y, z)$ — его плотностью, как это было уже определено в § 3, (IX).

Прежде всего займёмся исследованием условия на бесконечности.

Оценивая (XI.4), будем иметь:

$$|u(x_0, y_0, z_0)| \leqslant A \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{rR^{2+\alpha}}\,dx\,dy\,dz.$$

Переходя к оценке последнего интеграла, заметим, что величина его зависит только от $R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, и если положить $x_0 = R_0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, то она не изменится. В самом деле, очевидно, этот интеграл не меняется при повороте координатных осей, и можно выбрать эти координатные оси так, чтобы ось OX проходила через особую точку. Делая теперь замену переменных

$$x = R_0\xi, \quad y = R_0\eta, \quad z = R_0\zeta,$$

приведём его к виду

$$A \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_0^3\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{R_0^{3+\alpha}\mathrm{P}^{2+\alpha}\mathrm{P}_1} = \frac{A}{R_0^\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\mathrm{P}_1\mathrm{P}^{2+\alpha}},$$

где $\mathrm{P} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, а $\mathrm{P}_1 = \sqrt{(\xi - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Последний интеграл сходится, ибо: 1) при $\mathrm{P} \to \infty$ подинтегральное выражение убывает, как $\frac{1}{\mathrm{P}^{3+\alpha}}$; 2) вблизи $\mathrm{P} = 0$ особенность порядка $\frac{1}{\mathrm{P}^{2+\alpha}}$ интегрируема; 3) вблизи $\mathrm{P}_1 = 0$ особенность порядка $\frac{1}{\mathrm{P}_1}$ интегрируема.

Обозначая

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\mathrm{P}_1\mathrm{P}^{2+\alpha}} = k,$$

получим:

$$|u(x_0, y_0, z_0)| \leqslant \frac{Ak}{R_0^\alpha},$$

что и доказывает наше утверждение.

Докажем, что $u(x_0, y_0, z_0)$ имеет непрерывные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_0} dx\,dy\,dz.$$

Дифференцирование под знаком интеграла, очевидно, выполнимо, так как полученный интеграл равномерно сходится. В самом деле,

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_0} = \frac{x - x_0}{r^3} \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_0}\right| \leqslant \frac{1}{r^2};$$

Существование непрерывных первых производных у ньютоновского потенциала доказано. Для того чтобы доказать существование и непрерывность вторых производных, необходимо наложить некоторые новые ограничения на функцию $\rho(x, y, z)$. Именно, мы положим, что эта функция имеет непрерывные производные 1-го порядка. Это ограничение не является существенным, но замена его другим, более слабым, потребовала бы больших усилий.

Функцию ρ всегда можно разбить на такие два слагаемых: $\rho = \rho_1 + \rho_2$, чтобы в окрестности данной точки (x_0, y_0, z_0) функция ρ_2 была бы тождественно равна нулю, а функция ρ_1 была бы равна тождественно нулю в некоторой окрестности бесконечности, т. е. везде вне некоторой области D. При этом можно добиться того, что ρ_1 и ρ_2 в свою очередь будут иметь непрерывные производные 1-го порядка. Тогда

$$u(x_0, y_0, z_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1}{r} dx\,dy\,dz + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2}{r} dx\,dy\,dz.$$

Ввиду того, что в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) величина $\rho_2 \equiv 0$, мы можем из 2-го интеграла исключить эту окрестность и тогда дифференцировать его по параметру 2 раза, получая равномерно сходящиеся интегралы. Займёмся первым интегралом. Мы будем иметь, например:

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1}{r} dx\,dy\,dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_1 \frac{x - x_0}{r^3} dx\,dy\,dz,$$

Вводя новые переменные $x=x_0+\xi$, $y=y_0+\eta$, $z=z_0+\zeta$, мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_1}{r}\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi\rho_1(x_0+\xi,\,y_0+\eta,\,z_0+\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^3}},$$

и очевидно, что по параметрам x_0, y_0, z_0 этот последний интеграл дифференцировать можно. Это следует из того, что интегралы от производных будут сходиться равномерно.

Нам остаётся доказать, что ньютонов потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона.

Для доказательства мы поступим так же, как поступали при доказательстве существования решения уравнения распространения тепла. Возьмём функцию $\psi(x_0, y_0, z_0)$, равную нулю везде, кроме некоторого шара C с центром в точке (x_0, y_0, z_0), и имеющую непрерывные производные нескольких порядков. Тогда по формуле Грина (IX.4), замечая, что вне шара C функции ψ и $\frac{d\psi}{dn}$ равны нулю, получим:

$$\psi(x_0, y_0, z_0)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta\psi(x, y, z)}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

Умножая обе части на $\rho(x_0, y_0, z_0)$ и интегрируя по x_0, y_0, z_0, будем иметь:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x_0, y_0, z_0)\,\rho(x_0, y_0, z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{6\ \text{раз}}\frac{\Delta\psi(x, y, z)\,\rho(x_0, y_0, z_0)}{r}\,dx\,dy\,dz\,dx_0\,dy_0\,dz_0=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta\psi(x, y, z)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(x_0, y_0, z_0)}{r}\,dx_0\,dy_0\,dz_0\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(x, y, z)\,\Delta\psi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \qquad \text{(XI.5)}$$

Последний интеграл можно преобразовать, так как по достаточно большой области D:

$$\iiint\limits_D u\,\Delta\psi\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D \psi\,\Delta u\,dx\,dy\,dz.$$

Сопоставляя это с (XI.5), приходим к заключению, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y, z)\,[\Delta u + 4\pi\rho]\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Из произвольности $\psi(x, y, z)$ вытекает

$$\Delta u = -4\pi\rho,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ XII.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ШАРА.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа, с которой мы познакомились во II лекции, есть задача об определении гармонической функции внутри области, если известны её значения на границе. Можно ставить задачу Дирихле не только для уравнения Лапласа, но и для других уравнений эллиптического типа, понимая тогда под задачей Дирихле задачу об отыскании решения данного уравнения в данной области, принимающего заданные значения на границе области. В настоящей лекции мы будем заниматься решением задачи Дирихле для шара, поставленной для уравнения Пуассона $\Delta u = \rho$.

Рассмотрим внутри шара Ω

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,$$

ограниченного сферой S, точку (x_0, y_0, z_0). Как мы видели, функция $\frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, есть решение уравнения Лапласа.

Применяя формулу Грина (IX.4) к $\frac{1}{r}$ и некоторому решению u уравнения Пуассона $\Delta u = \rho$, получим

$$u(x_0, y_0, z_0) = \\ = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} u - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_\Omega \frac{\rho}{r}\, dx\, dy\, dz. \quad \text{(XII.1)}$$

Если бы мы нашли такую гармоническую функцию $g(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$, что $g\Big|_S = \frac{1}{r}\Big|_S$, то, применяя формулу Грина к u и g, имели бы

$$\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_\Omega (g\,\Delta u - u\,\Delta g)\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_\Omega g\rho\, dx\, dy\, dz = \\ = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(\frac{dg}{dn} u - g \frac{du}{dn} \right) dS. \quad \text{(XII.2)}$$

Складывая (XII.1) и (XII.2) и обращая внимание на значении g на сфере S, получим:

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{4\pi r} - \frac{g}{4\pi}\right) \rho\, dx\, dy\, dz +$$
$$+ \iint\limits_{S} \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{4\pi r} - \frac{g}{4\pi}\right) u\, dS. \qquad \text{(XII.3)}$$

Обозначая

$$\frac{1}{4\pi r} - \frac{g}{4\pi} = G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \qquad \text{(XII.4)}$$

имеем:

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iiint\limits_{\Omega} G\rho\, d\Omega + \iint\limits_{S} \frac{dG}{dn} u\, dS. \qquad \text{(XII.5)}$$

Функция G называется функцией Грина; формула (XII.5) даёт в случае уравнения Пуассона в явном виде решение задачи Дирихле для шара, если известна функция Грина.

Функция Грина принимает на границе шара значение нуль и есть сумма $\frac{1}{r}$ и гармонической всюду в области функции g. Очевидно, что она определяется однозначно.

Построим функцию Грина явно. Это можно сделать, пользуясь формулой (X.12).

Если точка (x, y, z) лежит на сфере радиуса единица, то $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$. Положим

$$r_1 = \sqrt{(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2 + (z - \zeta_0)^2}.$$

В силу (X.12) на сфере $R = 1$ будем иметь:

$$\left.\frac{1}{R_0 r_1}\right|_{R=1} = \frac{1}{r}.$$

Функция $\frac{1}{R_0 r_1}$ есть, очевидно, гармоническая функция внутри шара $R < 1$.

Следовательно, $g = \frac{1}{R_0 r_1}$.

Отсюда

$$G = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi R_0 r_1},$$

где

$$R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \qquad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$
$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{x_0}{R_0^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{R_0^2}\right)^2 + \left(z - \frac{z_0}{R_0^2}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{R_0}\sqrt{R^2 R_0^2 - 2(xx_0 + yy_0 + zz_0) + 1},$$

откуда

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{R^2 r_0^2 - 2(xx_0 + yy_0 + zz_0) + 1}}\right].$$

Как мы видим, функция G оказалась симметрической функцией относительно аргументов (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0). Следовательно, как функция x_0, y_0, z_0, она также является гармонической, если $r \neq 0$.

Проверим теперь, что формула (XII.5) действительно даёт решение задачи Дирихле для шара.

Нам достаточно доказать, что решение задачи Дирихле существует, ибо отсюда уже будет ясно, что мы получили именно решение. Заметим, что мы можем ограничиться случаем, когда на границе $u|_S = 0$.

Пусть $u|_S$ не равно нулю. Построим совершенно произвольную функцию v, принимающую на границе заданные значения и имеющую непрерывные производные второго порядка, и введём вместо u другую неизвестную функцию $w = u - v$. Легко убедиться, что $w|_S = 0$ и $\Delta w = \rho - \Delta v$, и задача свелась к предыдущей. Будем поэтому считать $u|_S = 0$.

Таким образом, нужно доказать, что функция

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iiint\limits_{\Omega} G\rho\, dx\, dy\, dz \tag{XII.6}$$

обращается в нуль на границе и удовлетворяет уравнению Пуассона.

Интеграл (XII.6) равномерно сходится, следовательно, он представляет собой непрерывную функцию. Значение её, если (x_0, y_0, z_0) является точкой границы, есть нуль, следовательно, интеграл (XII.6) стремится к нулю, если (x_0, y_0, z_0) стремится к точке границы.

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит внутри шара; запишем интеграл (XII.6) в виде

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho}{r}\, dx\, dy\, dz + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} g\rho\, dx\, dy\, dz.$$

Первое слагаемое есть ньютоновский потенциал и, следовательно, Δ_0 от него равен ρ. Второе слагаемое есть гармоническая функция, так как

$$\Delta_0\left[\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} g\rho\, dx\, dy\, dz\right] = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} \rho\, \Delta_0 g\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Следовательно, формула (XII.6) даёт решение уравнения Пуассона. Существование решения доказано.

Полезно преобразовать формулу (XII.6). Обозначим через γ угол, составленный радиусами-векторами точек (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z). Тогда расстояние r, как сторона треугольника, противолежащая углу γ, выразится в виде

$$r=\sqrt{R^2+R_0-2RR_0\cos\gamma},$$

аналогично r_1 выразится при этом в виде

$$r_1=\sqrt{R^2+\frac{1}{R_0^2}-2\frac{R}{R_0}\cos\gamma},$$

а функция Грина будет иметь вид

$$G=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+R_0^2-2RR_0\cos\gamma}}-\frac{1}{\sqrt{R^2R_0^2-2RR_0\cos\gamma+1}}\right];$$

$$\left.\frac{dG}{dn}\right|_{R=1}=-\left.\frac{dG}{dR}\right|_{R=1}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{R-R_0\cos\gamma}{(R^2+R_0^2-2RR_0\cos\gamma)^{3/2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{RR_0^2-R_0\cos\gamma}{(R^2R_0^2-2RR_0\cos\gamma+1)^{3/2}}\right]_{R=1}=\frac{1}{4\pi}\,\frac{1-R_0^2}{(1-2R_0\cos\gamma+R_0^2)^{3/2}}.$$

Для случая уравнения Лапласа $\Delta u=0$ и формула (XII.5) даст решение задачи Дирихле в виде

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\frac{1-R_0^2}{(1-2R_0\cos\gamma+R_0^2)^{3/2}}f(S)\,dS, \qquad \text{(XII.7)}$$

где $f(s)$ — заданные значения $u(x_0, y_0, z_0)$ на нашей сфере. Эта формула носит название *формулы Пуассона*.

Поставим теперь ещё одну задачу, так называемую внешнюю задачу Дирихле для шара.

Определить функцию u, удовлетворяющую вне шара уравнению $\Delta u=\rho$, принимающую на сфере S заданные значения и стремящуюся к нулю на бесконечности. Решение такой задачи, очевидно, единственно.

Пусть r, как прежде, обозначает расстояние от точки (x, y, z) до точки (x_0, y_0, z_0), лежащей вне шара, и пусть r_1 — расстояние до сопряжённой точки.

Тогда гармоническая функция g вне шара, принимающая на шаре значения $\left.\frac{1}{r}\right|_S$, будет аналогично прежнему иметь вид

$$\frac{1}{R_0r_1}.$$

Если предположить сначала, что на бесконечности функция u убывает, как $\frac{1}{R^\alpha}$, где $\alpha>0$, первые её производные, как

$\frac{1}{R^{n+1}}$, а вторые — как $\frac{1}{R^{n+2}}$, то нетрудно получить аналогично прежнему формулу

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iiint\limits_{\Omega} G\rho\, dx\, dy\, dz + \iint\limits_{S} \frac{dG}{dn} u\, dS;$$

где

$$G = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi R_0 r_1}.$$

Снова ограничиваясь, прежде всего, случаем, когда $u|_S = 0$, видим, что решение уравнения $\Delta u = \rho$ с однородными условиями имеет вид

$$u = -\iiint\limits_{\Omega} G\rho\, dx\, dy\, dz. \tag{XII.8}$$

Мы будем иметь, проводя опять замену переменных:

$$G = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{R^2R_0^2 - 2RR_0\cos\gamma + 1}}\right],$$

$$\left.\frac{dG}{dn}\right|_S = \left.\frac{dG}{dR}\right|_{=1} = \frac{R_0^2 - 1}{(R_0^2 - 2R_0\cos\gamma + 1)^{3/2}}.$$

Мы проверим, что формула (XII.8) даст решение поставленной задачи, если ρ обращается в нуль тождественно вне некоторой ограниченной области. Читателю предоставляется анализ общего случая. Попрежнему достаточно установить существование решения задачи с однородными условиями: $u|_S = 0$.

Но это утверждение очевидно. В самом деле, при достаточно большом R_0 имеем оценки:

$$|G| \leqslant \frac{M}{R_0}, \quad \left|\frac{dG}{dn}\right| \leqslant \frac{M}{R_0}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{dG}{dn}\right| \leqslant \frac{M}{R_0^2}; \tag{XII.9}$$

Первое из этих неравенств и даёт оценку для u:

$$|u| \leqslant \iiint\limits_{\Omega} \max|\rho| \frac{M}{R_0}\, dS = 4\pi\frac{\max|\rho|\, M}{R_0};$$

Выполнение уравнения $\Delta u = \rho$ доказывается, как прежде; также доказывается и обращение в нуль u на контуре.

Из тех же оценок (XII.9) немедленно вытекает ещё одно следствие.

Если гармоническая вне шара радиуса 1 функция стремится к нулю на бесконечности, то можно указать такую постоянную M, что

$$|u| < \frac{M}{R_0}; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{M}{R_0^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \frac{M}{R_0^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leqslant \frac{M}{R_0^2}. \tag{XII.10}$$

В самом деле, такая функция должна по теореме единственности совпадать с функцией

$$u_1 = \iint\limits_S \frac{dG}{dn} u|_S dS,$$

которая, по доказанному, есть гармоническая функция, равная нулю на бесконечности и принимающая на S те же значения, что и u. Значит:

$$|u| \leqslant \iint\limits_S \left|\frac{dG}{dn}\right| |u| dS \leqslant \max|u|_S \frac{M}{R_0} 4\pi;$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_0}\right| \leqslant \iint\limits_S \left|\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{dG}{dn}\right)\right| |u| dS \leqslant \max|u|_S \frac{M}{R_0^2} 4\pi \text{ и т. д.}$$

Наше утверждение доказано. Легко заменить в теореме, доказанной нами, единичный шар шаром произвольного радиуса при помощи преобразования переменных. Тогда мы получим теорему.

Теорема 1. Для всякой функции, гармонической в окрестности бесконечно далёкой точки и стремящейся к нулю при $R \to \infty$, существует такое число M, что имеют место неравенства (XII.10).

ЛЕКЦИЯ XIII.

ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА.

Мы встретились уже с постановкой двух основных задач теории уравнения Лапласа, а именно, с задачами Дирихле и Неймана.

Напомним, что задача Дирихле для уравнения Лапласа состоит в определении функции v в области Ω с границей S, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta u = 0 \tag{XIII.1}$$

и граничным условиям:

$$u|_S = f_1(S). \tag{XIII.2}$$

Задача Неймана состоит в отыскании решения (XIII.1), удовлетворяющего условию

$$\left.\frac{du}{dn}\right|_S = f_2(S). \tag{XIII.3}$$

Примем за область Ω область $z > 0$; поверхностью S будет служить плоскость XOY. Докажем, что *в такой области решение задачи Дирихле, ограниченное всюду, единственно, а решение задачи Неймана определяется с точностью до произвольной постоянной* и, следовательно, определяется однозначно, если потребовать, например, чтобы $u(x, y, z)$ стремилась к нулю на бесконечности при каком-нибудь законе удаления точки x, y, z.

Пусть, например, задача Дирихле имеет какие-нибудь два решения u_1 и u_2. При этом разность $v = u_1 - u_2$ будет гармонической функцией, обращающейся в нуль при $z = 0$. Определим v для отрицательных значений z нечётным образом:

$$v(x, y, z) = -v(x, y, -z).$$

Докажем, что эта функция будет теперь гармонической во всём пространстве, включая и плоскость $z = 0$.

Построим сферу σ произвольного радиуса с центром на плоскости $z=0$ и определим функцию v_1, гармоническую внутри шара, ограниченного этой сферой, принимающую на поверхности сферы значения

$$v_1|_\sigma = v|_\sigma. \tag{XIII.4}$$

Легко видеть, что v_1 будет равна нулю при $z=0$. В самом деле, функция

$$w_1(x, y, z) = \frac{1}{2}[v_1(x, y, z) + v_1(x, y, -z)]$$

будет гармонической и принимает на сфере σ значения нуль; следовательно, $w_1(x, y, 0) = 0$. Но

$$w_1(x, y, 0) = v_1(x, y, 0).$$

Плоскость $z=0$ рассечёт наш шар на два полушара. Функция v_1 на границе каждого из них совпадает с v; на поверхности σ это следует из (XIII.4), а на части плоскости $z=0$ обе эти функции равны нулю. Следовательно, $v=v_1$ и, значит, функция v имеет все производные всюду внутри шара σ и гармонична в нём. Так как положение центра шара σ произвольно, то v будет гармонической во всём пространстве.

В силу следствия 2 из теоремы 5(X) и леммы 1(XI) $v=0$, что и требовалось доказать.

Докажем единственность решения второй из рассматриваемых задач.

Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи Неймана для полупространства. Тогда функция $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям:

$$1)\ \Delta v = 0 \quad \text{при } z > 0,$$

$$2)\ \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,$$

$$3)\ \lim_{(x^2+y^2+z^2)\to\infty} v = 0.$$

Определим для отрицательных z функцию v с помощью формулы

$$v(x, y, z) = v(x, y, -z).$$

Докажем, что определённая таким образом функция v будет гармонической всюду, включая плоскость $z=0$.

Рассмотрим производную

$$\frac{\partial v}{\partial z} = w(x, y, z).$$

Это будет функция, гармоническая в верхнем и в нижнем полупространстве, удовлетворяющая условиям:

$$w(x, y, z) = -w(x, y, -z), \ w(x, y, 0) = 0.$$

и, следовательно, как мы только что доказали, гармоническая во всём пространстве.

При этом функция

$$\omega(x, y, z) = \int\limits_{z}^{z+1} \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} dz = v(x, y, z+1) - v(x, y, z)$$

также будет гармонической во всём пространстве.

Отсюда следует, что функция $v(x, y, z)$ — также гармоническая во всём пространстве. В самом деле, она могла бы не быть гармонической только на плоскости $z = 0$. Но

$$v(x, y, z) = v(x, y, z+1) - \omega(x, y, z). \tag{XIII.5}$$

Правая часть (XIII.5) гармонична на этой плоскости, следовательно, гармонична и левая. Отсюда, в силу леммы 1 (XI), сразу получим:

$$v \equiv 0;$$

Следовательно, решение задачи Неймана единственно, что и требовалось доказать.

Переходим к явному решению задач Дирихле и Неймана.

Предположим, что рассматриваемая нами гармоническая функция удовлетворяет условиям:

$$|u| \leqslant \frac{\mu}{R^{\alpha}}; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{\mu}{R^{1+\alpha}}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \frac{\mu}{R^{1+\alpha}}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leqslant \frac{\mu}{R^{1+\alpha}},$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\alpha > 0$, а μ — постоянная.

После того как явное решение задач будет нами получено, надобность в этом предположении отпадёт.

Применим к функции u формулу Грина (IX.4), выбрав за объём Ω полушар с центром в начале координат

$$R \leqslant A, \quad z \geqslant 0.$$

Так как $\Delta u = 0$, то

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) dS,$$

где

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Поверхность S состоит из куска S_1 плоскости $z = 0$ и из поверхности S_2 полусферы $R = A$. Устремляя A к бесконечности, видим, что

$$\lim_{R \to \infty} \iint\limits_{S_2} \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) dS = 0.$$

В самом деле,

$$\left|\iint\limits_{S_2} u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}dS\right| \leqslant \frac{1}{(A-R_0)^2}\iint\limits_{S_2}|u|\,dS \leqslant \frac{4\pi\mu A^2}{(A-R_0)^2 A^\alpha},$$

$$\left|\iint\limits_{S_2}\frac{1}{r}\frac{du}{dn}dS\right| \leqslant \frac{1}{A-R_0}\iint\limits_{S_2}\left|\frac{du}{dn}\right|dS \leqslant \frac{4\pi\mu A}{(A-R_0)A^\alpha},$$

где

$$R_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}.$$

Поэтому

$$u(x_0, y_0, z_0)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}-\frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right)dS=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{z=0}\left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}-\frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right)dS. \quad \text{(XIII.6)}$$

Рассмотрим вместе с (x_0, y_0, z_0) ещё точку $(x_0, y_0, -z_0)$ и пусть $r_1=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}$. В верхней полуплоскости $\frac{1}{r_1}$ — гармоническая функция, так же, как и u. Поэтому

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{r_1}\Delta u-u\Delta\frac{1}{r_1}\right)dx\,dy\,dz=0,$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_{S_1+S_2}\left(u\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}-\frac{1}{r_1}\frac{du}{dn}\right)dS=0.$$

Переходя к пределу, когда A стремится к бесконечности, и пользуясь теми же оценками, что и при выводе формулы (XIII.6), получим:

$$\iint\limits_{z=0}\left(u\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}-\frac{1}{r_1}\frac{du}{dn}\right)dS=0.$$

Заметим теперь, что на плоскости $z=0$ $r_1=r$ и $\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}=-\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ (радиусы-векторы r_1 и r симметричны относительно плоскости

$z=0$), откуда

$$\iint\limits_{z=0}\left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}+\frac{1}{r}\,\frac{du}{dn}\right)dS=0. \tag{XIII.7}$$

Складывая (XIII.7) и (XIII.6), получаем:

$$u(x_0,\,y,\,z_0)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{z=0}u\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,dS=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{z=0}f_1(s)\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,dS. \tag{XIII.8}$$

Вычитая (XIII.7) из (XIII.6), будем иметь:

$$u(x_0,\,y_0,\,z_0)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{z=0}\frac{1}{r}\,\frac{du}{dn}\,dS=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{z=0}\frac{1}{r}\,f_2(S)\,dS. \tag{XIII.9}$$

Проверим теперь, что формулы (XIII.8) и (XIII.9) действительно дают решение задач Дирихле и Неймана.

Мы будем предполагать, что $f_1(S)=f_1(x,\,y)$ и $f_2(S)=f_2(x,\,y)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам:

$$|f_1(x,\,y)|\leqslant\frac{M}{\rho^{\alpha}},\qquad |f_2(x,\,y)|\leqslant\frac{M}{\rho^{1+\alpha}},$$

где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\alpha>0$, а M — постоянная.

Убедимся сначала, что интегралы, стоящие в правых частях этих равенств, действительно удовлетворяют уравнению Лапласа; это вытекает из того, что везде при $z_0>0$ их можно дифференцировать по x_0, y_0, z_0 под знаком интеграла и, следовательно, например:

$$\Delta_0\iint\limits_{z=0}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,f_1(S)\,dS=\iint\limits_{z=0}f_1(S)\,\frac{d}{dn}\left[\Delta_0\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS=0;$$

так же точно доказываем, что правая часть (XIII.9) удовлетворяет уравнению. Оценим поведение правой части (XIII.8) и (XIII.9) при $R_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\to\infty$.

Начнём с оценки интеграла (XIII.9). Докажем лемму: *Если* $0\leqslant\theta\leqslant1$, *то*

$$x^2-2\theta x+1\geqslant\frac{1}{2}(x-1)^2.$$

В самом деле,

$$2\theta x\leqslant 2x \text{ при } x>0$$

и

$$2\theta x\leqslant 0 \text{ при } x<0.$$

Следовательно,

$$2\theta x \leqslant x + |x|$$

и

$$x^2 - 2\theta x + 1 \geqslant x^2 - x + 1 - |x|.$$

Но $|x| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}$ $\left(\text{это следует из неравенства } |ab| \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)$ и, значит,

$$x^2 - 2\theta x + 1 \geqslant \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Для того чтобы оценить интеграл (XIII.9) в точке ($x_0 = \rho_0$, $y_0 = 0$, z_0) (оценка в этой точке благодаря симметрии даст всё, что нужно), мы положим:

$$\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} = R_0, \quad \frac{x}{R_0} = \xi, \quad \frac{y}{R_0} = \eta, \quad \frac{\rho_0}{R_0} = \theta.$$

При этом

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} f_2(x, y)\,dx\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x\rho_0 + y^2 + z_0^2 + \rho_0^2}} \, \frac{M}{\sqrt{(x^2+y^2)^{1+\alpha}}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{M}{R_0^\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 2\xi\theta + 1 + \eta^2}} \, \frac{1}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)^{1+\alpha}}}\,d\xi\,d\eta.$$

Благодаря лемме имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 2\xi\theta + 1 + \eta^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{(\xi-1)^2}{2} + \frac{\eta^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\xi-1)^2 + \eta^2}},$$

откуда

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} f_2(x, y)\,dx\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\sqrt{2}}{R_0^\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(\xi-1)^2 + \eta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)^{1+\alpha}}}\,d\xi\,d\eta.$$

Последний интеграл абсолютно сходится около всех трёх особенностей: 1) $\xi = 1$, $\eta = 0$; 2) $\xi = 0$, $\eta = 0$ и 3) $\xi = \infty$, $\eta = \infty$.

Полагая его равным N, имеем:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} f_1(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant \frac{MN\sqrt{2}}{R_0^{\alpha}}.$$

Следовательно, u обращается в нуль на бесконечности, что и требовалось доказать.

Оценим теперь поведение интеграла (XIII. 8). Полагая опять

$$\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} = R_0, \quad x = R_0\xi, \quad y = R_0\eta, \quad x_0 = \rho_0 = R_0\theta \text{ и } z_0 = R_0\lambda,$$

причём, очевидно,

$$0 \leqslant \theta \leqslant 1, \; 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \text{ и } \theta^2 + \lambda^2 = 1,$$

получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} f_1(x, y)\, dx\, dy = -\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{r^3} f_1(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{\sqrt{(x^2 - 2xx_0 + y^2 + x_0^2 + z_0^2)^3}} f_1(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{(\xi^2 - 2\theta\xi + 1 + \eta^2)^3}} f_1(R_0\xi, R_0\eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= -\iint\limits_{(\xi-1)^2+\eta^2 \leqslant \frac{1}{4}} \frac{\lambda f_1(R_0\xi, R_0\eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(\xi^2 - 2\theta\xi + 1 + \eta^2)^3}} - \iint\limits_{(\xi-1)^2+\eta^2 > \frac{1}{4}} \frac{\lambda f_1(R_0\xi, R_0\eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(\xi^2 - 2\theta\xi + 1 + \eta^2)^3}}.$$

Каждый из интегралов оцениваем отдельно:

$$\left| \iint\limits_{(\xi-1)^2+\eta^2 > \frac{1}{4}} \frac{\lambda f_1(R_0\xi, R_0\eta)}{\sqrt{(\xi^2 - 2\theta\xi + 1 + \eta^2)^3}}\, d\xi\, d\eta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{R_0^{\alpha}} \iint\limits_{(\xi-1)^2+\eta^2 > \frac{1}{4}} \frac{(\sqrt{2})^3}{\sqrt{[(\xi-1)^2 + \eta^2]^3}} \frac{M}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)^{\alpha}}}\, d\xi\, d\eta = \frac{N_1}{R_0^{\alpha}},$$

где N_1 обозначает интеграл в правой части последнего неравенства, который, очевидно, сходится. В круге $(\xi - 1)^2 + \eta^2 \leqslant \frac{1}{4}$

имеем $\sqrt{\xi^2+\eta^2} \geqslant \frac{1}{2}$. При этом оценка первого слагаемого даёт:

$$\left| \iint\limits_{(\xi-1)^2+\eta^2\leqslant\frac{1}{4}} \frac{\lambda f_1(R_0\xi, R_0\eta)}{\sqrt{(\xi^2-2\theta\xi+1+\eta^2)^3}}\, d\xi\, d\eta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{R_0^\alpha} \iint\limits_{(\xi-1)^2+\eta^2\leqslant\frac{1}{4}} \frac{\lambda}{\sqrt{(\xi^2-2\theta\xi+1+\eta^2)^3}} \frac{M}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)^\alpha}}\, d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M2^\alpha}{R_0^\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{[(\xi-\theta)^2+\eta^2+\lambda^2]^3}}\, d\xi\, d\eta = \frac{2^\alpha 2\pi M}{R_0^\alpha}.$$

(Последний интеграл равен телесному углу, под которым плоскость ξ, η видна из точки $(\theta, 0, \lambda)$ и, следовательно, равен 2π.)

Формулы (XIII.8) и (XIII.9) дают, следовательно, гармонические функции, удовлетворяющие условиям на бесконечности. Нужно проверить, что условия при $z=0$ также выполнены. Для этого достаточно установить, что

$$\lim_{z_0\to 0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{r^3} f_i(x, y)\, dx\, dy = f_i(x_0, y_0), \quad (i=1, 2),$$

ибо так выражаются и предельное значение решения задачи Дирихле и предельные значения нормальной производной решения задачи Неймана.

Окружим точку (x_0, y_0) кружком c так, что внутри c

$$|f_i(x, y) - f_i(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{6\pi};$$

оставшуюся после выделения c часть плоскости x, y обозначим c'. Так как функции $f(x, y)$ ограничены, то пусть

$$|f_i(x, y)| \leqslant L.$$

Возьмём z_0 настолько малым, чтобы телесный угол ω_c, под которым виден круг c из точки (x_0, y_0, z_0), был бы больше, чем

$$2\pi - \frac{\varepsilon}{3L}.$$

а следовательно, угол, под которым видно c', соответственно меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3L}$. (Сумма этих углов есть 2π.) Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{r^3} f_i(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} f_i(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_i(x, y)\,d\omega = \iint\limits_{c} f_i(x_0, y_0)\,d\omega +$$

$$+ \iint\limits_{c} [f_i(x, y) - f_i(x_0, y_0)]\,d\omega + \iint\limits_{c'} f_i(x, y)\,d\omega;$$

$$\left|2\pi f_i(x_0, y_0) - \iint\limits_{c} f_i(x_0, y_0)\,d\omega\right| \leqslant \left|f_i(x_0, y_0)\left(2\pi - 2\pi + \frac{\varepsilon}{3L}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3};$$

$$\left|\iint\limits_{c} [f_i(x, y) - f_i(x_0, y_0)]\,d\omega\right| \leqslant \iint\limits_{c} \frac{\varepsilon}{6\pi}\,d\omega \leqslant \frac{\varepsilon}{3};$$

$$\left|\iint\limits_{c'} f_i(x, y)\,d\omega\right| \leqslant L\iint\limits_{c'} d\omega \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0}{r^3} f_i(x, y)\,dx\,dy - 2\pi f_i(x_0, y_0)\right| \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ XIV.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ.

§ 1. Характеристики и бихарактеристики для волнового уравнения.

Рассмотрим волновое уравнение с четырьмя переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F(x, y, z, t) \qquad \text{(XIV.1)}$$

и займёмся прежде всего его характеристиками.

Уравнение поверхностей характеристик будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2=0, \qquad \text{(XIV.2)}$$

или

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{a^2}. \qquad \text{(XIV.2')}$$

В курсе теории уравнений 1-го порядка доказывается, что отыскание решений уравнения (XIV.2) сводится к нахождению интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q}=\frac{dz}{r}=\frac{dt}{-\frac{1}{a^2}s}=\frac{-dp}{0}=\frac{-dq}{0}=\frac{-dr}{0}=\frac{-ds}{0}=d\tau, \qquad \text{(XIV.3)}$$

где через p, q, r и s обозначены соответственно

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Поверхность характеристик, т. е. поверхность

$$\varphi=c,$$

где φ — функция, удовлетворяющая уравнению (XIV.2), состоит из линий, удовлетворяющих системе (XIV.3).

Эти линии — характеристики характеристик — принято называть бихарактеристиками.

Очевидно, что уравнения этих линий будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &p=p_0, \quad q=q_0, \quad r=r_0, \quad s=s_0, \\ &x-x_0=p_0\tau, \quad y-y_0=q_0\tau, \quad z-z_0=r_0\tau \\ \text{и} \quad &t-t_0=-\frac{1}{a^2}s_0\tau. \end{aligned}\right\} \quad (XIV.4)$$

Построим некоторое семейство бихарактеристик, зависящее от трёх параметров, для которого выполнены условия:

$$\left.\begin{aligned} &p_0\,dx_0+q_0\,dy_0+r_0\,dz_0+s_0\,dt_0=0, \\ &p_0^2+q_0^2+r_0^2-\frac{1}{a^2}s_0^2=0. \end{aligned}\right\} \quad (XIV.5)$$

(Величины x_0, y_0, z_0, t_0, p_0, q_0, r_0 и s_0 считаются при этом функциями трёх произвольных параметров, и дифференциалы взяты по этим параметрам.) Многообразие всех точек x, y, z, t, лежащих на этих бихарактеристиках, образует поверхность, удовлетворяющую уравнению (XIV.2′), т. е. характеристическую поверхность.

Проведём все бихарактеристики, проходящие через x_0, y_0, z_0, t_0, считая x_0, y_0, z_0, t_0 постоянными. Возводя уравнение (XIV.4) в квадрат и пользуясь (XIV.5), получим:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-a^2(t-t_0)^2=0. \quad (XIV.6)$$

Поверхность (XIV.6) называется характеристическим коноидом. По построению ясно, что она удовлетворяет уравнению (XIV.2′), что, впрочем, легко проверить и непосредственно.

Для случая уравнения колебаний мембраны уравнение такой поверхности характеристик было бы:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-a^2(t-t_0)^2=0.$$

Это уравнение представляет собой конус с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0) в трёхмерном пространстве x, y, t.

Представим уравнение (XIV.6) в виде

$$t=t_0\pm\frac{r}{a}, \quad (XIV.7)$$

где

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

В зависимости от выбора знака в (XIV.7), мы получим уравнение верхней или нижней половин коноида. Мы используем нижнюю половину, т. е. часть, определённую уравнением:

$$t=t_0-\frac{r}{a}.$$

§ 2. Метод Кирхгофа для решения задачи Коши.

Идея метода Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения такова же, как и идея приведённого выше решения задачи Гурса (V, § 1) по методу последовательных приближений.

Строится коноид характеристик с вершиной в данной точке (x_0, y_0, z_0). После подробного рассмотрения оказывается, что волновое уравнение влечёт за собой существование уравнения, связывающего значения u и её производных на этом коноиде. Это позволяет просто выразить значение неизвестной функции в вершине коноида.

Приступим к изучению метода.

Пусть

$$t_1 = t - t_0 + \frac{r}{a};$$

$t_1 = \text{const.}$ при этом даёт уравнение характеристического коноида.

Переведём уравнение (XIV.1) в новое уравнение, считая независимыми переменными

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z \quad \text{и} \quad t_1 = t - t_0 + \frac{r}{a}.$$

Обозначим ещё

$$u\left(x_1, y_1, z_1, t_1 + t_0 - \frac{r}{a}\right) = u_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$$

и аналогично для других функций.

При этом

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial t_1}\frac{x_1 - x_0}{ra},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\,\partial t_1}\frac{x_1 - x_0}{ra} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2}\frac{(x_1 - x_0)^2}{r^2a^2} + \left(\frac{1}{ra} - \frac{(x_1 - x_0)^2}{r^3a}\right)\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\text{[1]},$$

и наше уравнение переходит в

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} + \frac{2}{a}\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right) + \frac{2}{ra}\frac{\partial u_1}{\partial t_1} +$$
$$+ \left[\left(\frac{x_1 - x_0}{ra}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_0}{ra}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{ra}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2} =$$
$$= F_1(x_1, y_1, z_1, t_1).$$

---

[1]) Очевидно, при нашей замене $r_1 = r$ и далее всюду мы пишем r.

где через $\frac{d}{dr}$ обозначено

$$\frac{d}{dr}=\frac{x_1-x_0}{r}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{y_1-y_0}{r}\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{z_1-z_0}{r}\frac{\partial}{\partial z_1};$$

оператор $\frac{d}{dr}$ обозначает производную, взятую по направлению радиуса r, проведённого из точки $(x_0, y_0, z_0,)$ в данную точку (x_1, y_1, z_1). В самом деле, $\frac{x_1-x_0}{r}=\cos(xr)$ и т. д.

Так как $\left(\frac{x_1-x_0}{ar}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_0}{ar}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_0}{ar}\right)^2-\frac{1}{a^2}=0$, наше уравнение запишется:

$$\Delta u_1+\frac{2}{ar}\frac{d}{dr}\left[r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right]=F_1(x_1, y_1, z_1, t_1),$$

или

$$\frac{1}{r}\Delta u_1+\frac{2}{ar^2}\frac{d}{dr}\left[r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right]=\frac{1}{r}F_1(x_1, y_1, z_1, t_1). \qquad \text{(XIV.8)}$$

Изучение $\frac{\partial u_1}{\partial t_1}$, $u_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и уравнения (XIV.8) вполне аналогично изучению значения связи функции u и её производных для уравнения с двумя независимыми переменными.

Формула (XIV.8) позволяет сразу построить некоторое частное решение волнового уравнения, имеющее важное значение. Пусть $F_1=0$. При этом, очевидно, функция $u_1=\frac{\Phi(t_1)}{r}$, где Φ_1 — произвольная, дважды дифференцируемая функция, — даёт нам решение уравнения (XIV.8) в силу того, что $\frac{\partial u_1}{\partial t_1}=\frac{1}{r}\Phi'(t_1)$; оба слагаемых левой части (XIV.8) обращаются в нуль. Подставляя вместо t_1 его выражение через x, y, z и t, получим: $u=\frac{1}{r}\Phi\left(t-t_0+\frac{r}{a}\right)$. В данном случае параметр t_0 является несущественным, и мы можем взять решение в виде

$$u=\frac{1}{r}\Phi_1\left(t+\frac{r}{a}\right).$$

Легко проверить, что

$$u=\frac{1}{r}\Phi_2\left(-t+\frac{r}{a}\right)$$

будет также решением волнового уравнения, так как волновое уравнение не меняется при земене t на $-t$. Положив $\Phi_2\left(-t+\frac{r}{a}\right)=\Phi_2\left(t-\frac{r}{a}\right)$, получим, складывая оба частных решения:

$$u=\frac{1}{r}\left[\Phi_1\left(t+\frac{r}{a}\right)+\Phi_2\left(t-\frac{r}{a}\right)\right]. \qquad \text{(XIV.9)}$$

Формула (XIV.9) по своему внешнему виду напоминает формулу Даламбера для решения уравнения колебаний струны. Решения, даваемые этой функцией, носят название сферических волн. Первое слагаемое представляет собой волну постоянной формы, сходящуюся к точке $r=0$. По мере приближения этой волны к своему центру амплитуда её растёт.

Второе слагаемое представляет собой волну постоянной формы, распространяющуюся от точки $r=0$ на бесконечность. Эта волна также отличается от рассмотренных волн в струне тем, что её амплитуда убывает на бесконечности, как $\frac{1}{r}$.

Если Φ_1 и Φ_2 отличны от нуля лишь на конечном промежутке изменения своего аргумента, то в каждой точке пространства до вступления сферических волн и после их прохождения функция u становится равной нулю, т. е. воцаряется покой.

Как мы далее увидим, роль этих решений для волнового уравнения сходна с той ролью, которую играет функция $\frac{1}{r}$ для уравнения Лапласа.

Проинтегрируем обе части уравнения (XIV.8) по некоторой области Ω пространства x_1, y_1, z_1, содержащей внутри себя точку (x_0, y_0, z_0). Границу области Ω обозначим S. Для удобства выделим из этой области точку (x_0, y_0, z_0) при помощи малой сферы σ радиуса ε, а впоследствии перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Мы получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{\Omega-\sigma}\left[\frac{1}{r}\Delta u_1+\frac{2}{ar^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right)\right]dx_1\,dy_1\,dz_1=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r}F_1(x_1, y_1, z_1, t_1)\,dx_1\,dy_1\,dz_1. \qquad \text{(XIV.10)}$$

Прежде чем переходить к пределу в левой части, мы несколько преобразуем её.

На основании формулы Грина (IX.4) имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{\Omega-\sigma}\frac{1}{r}\Delta u_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta u_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1=$$

$$=-4\pi u_1(x_0, y_0, z_0, t-t_0)+\iint\limits_{S}\left(u_1\frac{d\frac{1}{r}}{dn}-\frac{1}{r}\frac{du_1}{dn}\right)dS; \qquad \text{(XIV.11)}$$

так как t_1 при $x_1=x_0$, $y_1=y_0$, $z_1=z_0$ равняется $t-t_0$.

Далее, вводя полярные координаты:

$$dx_1\,dy_1\,dz_1 = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr,$$

будем иметь:

$$I_\sigma = \iiint\limits_{\Omega-\sigma} \frac{2}{ar^2}\frac{d}{dr}\left[r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right] dx_1\,dy_1\,dz_1 =$$

$$= \frac{2}{a}\iiint\limits_{\Omega-\sigma} \frac{d}{dr}\left[r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right]\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr =$$

$$= \frac{2}{a}\iint\limits_{S+\sigma} r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\left[-\operatorname{sign}\cos(r, n)\right]\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{2}{a}\iint\limits_{S+\sigma} r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\,d\omega,$$

где через ω обозначен телесный угол [см. (IX.8)]. Продолжая преобразования, получим:

$$I_\sigma = \frac{2}{a}\iint\limits_{S+\sigma} r\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,dS = -\frac{2}{a}\iint\limits_{S+\sigma}\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\,dS.$$

Предел $\iint\limits_{\sigma}\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\,dS$, очевидно, равен нулю, если $\frac{\partial u_1}{\partial t_1}$ ограничено. В самом деле, $\frac{dr}{dn}$ ограничено, и интеграл меньше, чем

$$\frac{M}{\varepsilon}\iint\limits_{\sigma} dS = 4\pi\varepsilon M,$$

где M — некоторая постоянная; следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\sigma = -\frac{2}{a}\iint\limits_{S}\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\,dS. \qquad \text{(XIV.12)}$$

Формулы (XIV.10), (XIV.11) и (XIV.12) дают:

$$-4\pi u_1(x_0, y_0, z_0, t-t_0) + \iint\limits_{S}\left(u_1\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du_1}{dn} - \frac{2}{ra}\frac{dr}{dn}\frac{du_1}{dt_1}\right)dS =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r}F_1(x_1, y_1, z_1, t_1)\,dx_1\,dy_1\,dz_1.$$

Положим теперь $t_1 = 0$, тогда $t = t_0 - \frac{r}{a}$; если, кроме того, $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$, то $t = t_0$; поэтому

$$u_1(x_0, y_0, z_0, 0) = u(x_0, y_0, z_0, t_0),$$

$$F_1(x_1, y_1, z_1, 0) = F\left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a}\right).$$

и наша формула запишется так:

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(u_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du_1}{dn} - \frac{2}{ra}\frac{dr}{dn}\frac{\partial u_1}{\partial t_1} \right)\Bigg|_{t_1=0} dS -$$
$$- \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r} F\left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a}\right) dx\,dy\,dz. \qquad \text{(XIV.13)}$$

Формула (XIV.13) называется формулой Кирхгофа; как мы сейчас увидим, она позволяет найти решение задачи Коши для волнового уравнения.

Эта формула весьма напоминает по своему внешнему виду формулу Грина, выведенную нами ранее. Если считать u_1, $\frac{du_1}{dn}$, $\frac{\partial u_1}{\partial t_1}$ заданными на поверхности S, то правая часть (XIV.13) будет представлять собой известную функцию. В правой части этой формулы находятся интегралы, которые принято называть запаздывающими потенциалами. Поясним это название на примере последнего интеграла

$$\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r} F\left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a}\right) dx\,dy\,dz. \qquad \text{(XIV.14)}$$

В таком виде этот интеграл отличается от ньютонова потенциала только тем, что функция F входит не с аргументом t_0, а с «запаздывающим» аргументом $t_0 - \frac{r}{a}$.

Переходим к решению задачи Коши, т. е. к решению уравнения (XIV.1) при условиях:

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= \varphi_0(x, y, z), \\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= \varphi_1(x, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV.15)}$$

За поверхность S примем поверхность $t_0 - \frac{r}{a} = 0$; тогда на ней $t = 0$. Область, ограниченная S, будет шар радиуса at_0 вокруг точки x_0, y_0, z_0 и, следовательно, к ней применима формула (XIV.13). При $t = 0$ условия (XIV.15) определяют все производные первого порядка от u и, следовательно, от u_1. Мы будем иметь:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial u_1}{\partial t_1}\right|_{t=0}=\varphi_1(x, y, z);$$

$$\frac{du_1}{dn}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cos(nx)+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\cos(ny)+\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\cos(nz)=$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\cos(nx)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\cos(ny)+$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial z}\right)\cos(nz)=\frac{du}{dn}-\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial}\frac{}{dn}$$

и, следовательно,

$$\left.\frac{du_1}{dn}\right|_{t=0}=\frac{d\varphi_0}{dn}-\frac{1}{a}\varphi_1(x, y, z)\frac{dr}{dn},$$

и окончательно

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{r=at_0}\left(\varphi_0\frac{d\frac{1}{r}}{dn}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi_0}{dn}-\frac{1}{ar}\frac{dr}{dn}\varphi_1\right)dS-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leqslant at_0}\frac{1}{r}F\left(x, y, z, t_0-\frac{r}{a}\right)dx\,dy\,dz. \qquad \text{(XIV.16)}$$

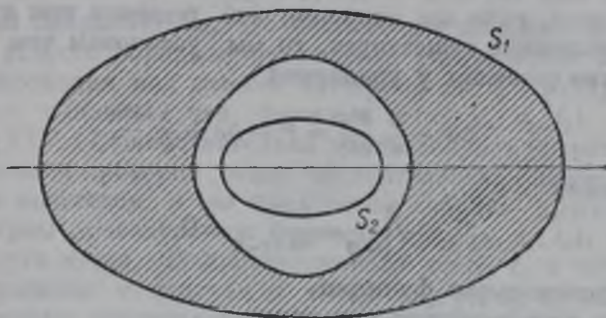
Формула (XIV.16) даёт явное выражение для значения неизвестной функции в любой точке (x_0, y_0, z_0). Тем самым доказывается единственность решения задачи Коши для волнового уравнения, если только такое решение существует. Мы покажем, далее, что полученная нами функция удовлетворяет уравнению и начальным условиям, а также проверим корректность постановки задачи Коши.

Пока что отметим некоторые важные следствия из этой формулы.

Представим себе, что внешних возмущающих сил нет, т. е. $F=0$, а начальное возмущение при $t=0$ сосредоточено в некоторой ограниченной области ω. Будем исследовать поведение решения в некоторой точке (x_0, y_0, z_0), лежащей вне области ω. Пусть расстояние от области ω до точки (x_0, y_0, z_0) равно δ. При $t_0<\frac{\delta}{a}$ сфера S, уравнение которой $r=at_0$, будет лежать вся вне ω, и поэтому результат подстановки такого значения t_0 в правую часть (XIV.16) даёт нуль. При $t_0=\frac{\delta}{a}$ функция u начнёт изменяться до тех пор, пока S пересекает область ω. Затем при $t_0=\frac{D}{a}$, где D — наибольшее удаление точки области ω от точки (x_0, y_0, z_0), u станет опять равным нулю и таким и останется. Чем дальше точка (x_0, y_0, z_0) от области ω, тем позднее дойдёт туда возмущение и тем позднее оно пройдёт мимо этой точки. В каждый данный момент t_0 мы можем построить поверхность S_1, отделяющую точки, до которых возмущение ещё не дошло, от тех, куда это возмущение уже докатилось. Эту поверхность называют передним фронтом волны.

Другая поверхность, S_2, отделяет точки, в которых возмущение ещё имеется, от тех, в которых колебание прекратилось. Эта поверхность называется задним фронтом волны.

Наличием заднего фронта волны объясняется тот факт, что звук, издаваемый каким-либо источником, не затухает постепенно в данной точке пространства, а прекращается сразу после прохождения волны.



Черт. 12.

Если бы это обстоятельство не имело места, звуки сливались бы друг с другом, как звуки рояля, на котором нажата и не отпускается педаль.

На прилагаемом черт. 12 изображены передний и задний фронты волны, возникшей из возмущения в ограниченной области ω.

Переходим к доказательству корректности постановки задачи Коши.

Если вместо функций φ_0 и φ_1 мы подставим в формулу (XIV.16) другие φ_0^* и φ_1^*, такие, что

$$|\varphi_0-\varphi_0^*|<\varepsilon, \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_0^*}{\partial x}\right|<\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_0^*}{\partial y}\right|<\varepsilon, \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_0^*}{\partial z}\right|<\varepsilon,$$

$$|\varphi_1-\varphi_1^*|<\varepsilon,$$

то решение u^* задачи Коши, как это вытекает из формулы (XIV.16), для новых начальных данных будет мало отличаться от решения для старых, ибо

$$|u^* - u| =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left|\iint\limits_{r=at_0}\left[(\varphi_0^* - \varphi_0)\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi_0^*}{dn} - \frac{d\varphi_0}{dn}\right) - \frac{1}{ar}\frac{dr}{dn}(\varphi_1^* - \varphi_1)\right]ds\right| < M\varepsilon.$$

Докажем теперь, что полученное нами решение действительно удовлетворяет уравнению.

Прежде всего заметим, что доказательство достаточно провести для того случая, когда φ_0 и φ_1 тождественно равны нулю. В самом деле, если мы докажем, что решение при нулевых начальных условиях существует, то мы установим тем самым существование решения у уравнения

$$\Delta w - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F - \Delta v + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

при условиях

$$w\Big|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,$$

где v — произвольная функция.

Если v удовлетворяет условиям

$$v\Big|_{t=0} = \varphi_0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1,$$

а такие функции, очевидно, существуют, например $v = \varphi_0 + t\varphi_1$, то отсюда следует существование функции $u = w + v$, удовлетворяющей условиям Коши и волновому уравнению (XIV.1). Если же решение этой последней задачи существует, то оно обязано выражаться формулой (XIV.16).

Полагая в формуле (XIV.16) $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$, получим:

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r \leq at_0}\frac{1}{r}F\left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a}\right)dx\,dy\,dz. \qquad \text{(XIV.17)}$$

При $t_0 = 0$ интеграл в правой части обращается в нуль. Для того чтобы продифференцировать его, мы заменим в нём переменные, полагая

$$x = x_0 + at_0\xi, \quad y = y_0 + at_0\eta, \quad z = z_0 + at_0\zeta;$$

тогда

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = at_0\rho,$$

где

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

и интеграл переходит в

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$
$$= -\frac{a^2 t_0^2}{4\pi a t_0} \iiint\limits_{\rho \leqslant 1} \frac{1}{\rho} F\,[x_0 + a t_0 \xi, y_0 + a t_0 \eta, z_0 + a t_0 \zeta, t_0(1-\rho)]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Правую часть можно дифференцировать под знаком интеграла. После того, положив $t_0 = 0$, имеем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t_0}\right|_{t_0=0} = 0,$$

так как мы предполагаем, что частные производные функции F первого и второго порядков ограничены. Обоснование законности дифференцирования под знаком интеграла см. § 2 (VII).

Остаётся доказать, что функция $u(x_0, y_0, z_0, t_0)$, даваемая формулой (XIV.17), действительно удовлетворяет уравнению. Непосредственная проверка этого обстоятельства потребовала бы громоздких выкладок, и мы предпочтём избрать другой путь.

Рассмотрим произвольную функцию $\psi(x_0, y_0, z_0, t_0)$, обращающуюся в нуль везде, кроме некоторого шара c, в четырёхмерном пространстве с центром в точке (x_0, y_0, z_0, t_0) и имеющую везде несколько непрерывных производных.

Эта функция удовлетворяет некоторому уравнению:

$$\Delta\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \Phi, \qquad \text{(XIV.18)}$$

где Φ легко вычислить непосредственным дифференцированием.

Согласно нашему предположению

$$\psi\Big|_{t=T} = 0, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{t=T} = 0.$$

При этом функция ψ, как решение задачи Коши для уравнения (XIV.18), представляется для $t < T$ формулой

$$\psi(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$
$$= -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant a(T-t_0)} \frac{1}{r} \Phi\left(x, y, z, t_0 + \frac{r}{a}\right) dx\, dy\, dz. \qquad \text{(XIV.19)}$$

(Этой формулы мы не выводили, но она сразу получается, если заменить сначала в уравнении t на $T - t^*$ и, преобразовав данные, написать решение уравнения, а потом вернуться от переменного t^* к переменному t.)

В формуле (XIV.19) мы могли бы и не ставить пределов интегрирования, так как при $r \geqslant a(T - t_0)$ функция $\Phi\left(x, y, z, t_0 + \frac{r}{a}\right)$, очевидно, обращается в нуль, ибо $t_0 + \frac{r}{a} \geqslant T$.

Пусть $F(x_0, y_0, z_0, t_0)=0$ при $t_0<0$.

Умножим функцию $\psi(x_0, y_0, z_0, t_0)$ на $F(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и проинтегрируем по всему пространству. Мы будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_0, y_0, z_0, t_0) F(x_0, y_0, z_0, t_0)\, dx_0\, dy_0\, dz_0\, dt_0 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x_0, y_0, z_0, t_0) \times$$

$$\times \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r}\Phi\left(x, y, z, t_0+\frac{r}{a}\right) dx\, dy\, dz\right\} dx_0\, dy_0\, dz_0\, dt_0.$$

Последний интеграл можно записать в виде

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r}\Phi\left(x, y, z, t_0+\frac{r}{a}\right) \times$$
$$\times F(x_0, y_0, z_0, t_0)\, dx\, dy\, dz\, dx_0\, dy_0\, dz_0\, dt_0.$$

В самом деле, подинтегральная функция отлична от нуля в ограниченной области своих независимых переменных. Если $\frac{r}{a}$ или t_0 слишком велико, то $t_0+\frac{r}{a}$ также будет большим, так как $t_0>0$. Заменим переменные, полагая $t_0+\frac{r}{a}=t$.

Тогда справедлива формула:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_0, y_0, z_0, t_0) F(x_0, y_0, z_0, t_0)\, dx_0\, dy_0\, dz_0\, dt_0 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, y, z, t) \times$$

$$\times \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} F\left(x_0, y_0, z_0, t-\frac{r}{a}\right) dx_0\, dy_0\, dz_0\right\} dx\, dy\, dz\, dt.$$

В самом деле, внутренний интеграл имеет смысл, ибо подинтегральная функция при фиксированных x, y, z, t отлична от нуля лишь в ограниченной области. Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y, z, t)\, F(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Delta\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi^2}{\partial t^2}\right) u(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz\, dt, \quad \text{(XIV.20)}$$

где

$$u(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} F\left(x_0, y_0, z_0, t - \frac{r}{a}\right) dx_0\, dy_0\, dz_0.$$

Оператор

$$\Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

как нетрудно видеть, есть оператор самосопряжённый [см. § 2 (V)].

Поэтому интеграл

$$\iiiint_{\Omega} \left[u\left(\Delta\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) - \psi\left(\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right] dx\, dy\, dz\, dt =$$

$$= \iiiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial P_t}{\partial t}\right) dx\, dy\, dz\, dt$$

преобразуется в интеграл, взятый на поверхности S, ограничивающей объём Ω [см. (V.15)].

Если взять объём Ω достаточно большим, так, чтобы на поверхности S функция ψ и все её первые производные уничтожались, то правая часть последнего равенства обратится в нуль, и мы получим:

$$\iiiint_{\Omega} u\left(\Delta\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) dx\, dy\, dz\, dt =$$

$$= \iiiint_{\Omega} \psi\left(\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) dx\, dy\, dz\, dt,$$

отсюда на основании (XIV.20)

$$\iiiint_{\Omega} \psi(x, y, z, t)\left[\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F\right] dx\, dy\, dz\, dt = 0.$$

Последний интеграл обращается в нуль при любых ψ, откуда

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F,$$

Тем самым доказано, что функция u удовлетворяет уравнению.

Сделаем ещё одно важное замечание.

Как мы видели, решение уравнений колебания струны было столь же гладким, как и начальные условия, т. е. допускало столько же непрерывных производных, сколько их было у функций, стоящих в начальных условиях.

Решение уравнений теплопроводности оказывалось более гладким, чем начальные условия.

Решение волнового уравнения в этом смысле отличается от рассмотренных задач. Они являются, вообще говоря, менее гладкими, чем начальные условия. Это видно хотя бы из того, что значение функции u выражается в формуле Кирхгофа через интеграл от нормальной производной $\left.\frac{du}{dn}\right|_{t=0}$.

Значение производной порядка k, удовлетворяющей тому же уравнению, связано таким образом с начальными значениями производных порядка $k+1$ от начальных данных.

Мы разобрали в течение этой лекции только задачу Коши в случае, когда начальные данные относятся к поверхности $t=0$. Однако, тот же самый метод позволяет строить решение задачи Коши и в общем случае, когда начальные данные заданы на гиперповерхности $t=\psi(x, y, z)$, а также решенке задачи, аналогичной задаче Гурса.

Подробный разбор этих задач мы предоставляем читателю.

ЛЕКЦИЯ XV.

СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛОВ ПРОСТОГО И ДВОЙНОГО СЛОЯ.

§ 1. Общие замечания.

Для того чтобы рассмотреть задачи Дирихле и Неймана кроме шара и полупространства ещё и для других областей, мы должны будем изучить в отдельности поведение интегралов

$$I_1 = \iint\limits_S \frac{d\frac{1}{r}}{dn} f_1(S)\,dS \quad \text{и} \quad I_2 = \iint\limits_S \frac{f_2(S)\,dS}{r}, \qquad \text{(XV.1)}$$

которые встречались нам уже неоднократно. Как мы упоминали выше, интеграл I_2 называется потенциалом простого слоя, а функция $f_2(S)$ — его плотностью. Интеграл I_1 называется потенциалом двойного слоя, а $f_1(S)$ — его плотностью. Функции $f_2(S)$ и $f_1(S)$ будем предполагать непрерывными.

Мы будем называть поверхность S гладкой в смысле Ляпунова, или просто *поверхностью Ляпунова*, если будут выполнены следующие условия:

а) Поверхность S имеет везде касательную плоскость, меняющуюся непрерывно от точки к точке.

б) Вокруг каждой точки P_0 поверхности можно описать такой шар радиуса h, не зависящего от P_0, внутрь которого попадёт лишь участок Σ поверхности S, встречающий прямые, параллельные нормали $\mathbf{n}_0$ в точке P_0 не более, чем один раз.

в) Если P_1 и P_2 — две точки поверхности, а $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — единичные векторы, направленные по нормали к поверхности S в этих точках, то вектор $\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2| \leqslant A r^{\delta},$$

где A и δ — постоянные числа; $0 < \delta \leqslant 1$, а r обозначает расстояние между точками P_1 и P_2.

г) Телесный угол ω_σ, под которым любая часть σ поверхности S видна из произвольной точки P_0, ограничен

$$|\omega_\sigma| \leqslant K.$$

(Если прямые, выходящие из P_0, встречают поверхность S неоднократно, то, взяв за σ множество таких кусков S, которые видны с положительной стороны, мы можем получить $\omega_0 > 4\pi$ и вообще сколь угодно большое. Поэтому такое ограничение существенно.)

Мы рассмотрим сначала случай, когда S — конечная, гладкая в смысле Ляпунова замкнутая поверхность. Пусть Ω — область, заключённая внутри S.

Займёмся более детальным исследованием характера интегралов, входящих в выражение потенциала простого и двойного слоя.

Исследуем поведение этих интегралов вблизи некоторой точки поверхности P. Для удобства выберем систему координат таким образом, чтобы исследуемая точка поверхности P попала в начало, касательная плоскость в этой точке совпала бы с плоскостью XOY, а ось OZ — с направлением внутренней нормали. Пусть уравнение поверхности S будет:

$$z = \zeta(x, y), \text{ тогда } \zeta(0, 0) = \frac{\partial \zeta(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial \zeta(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

§ 2. Свойства потенциала двойного слоя.

Рассмотрим прежде всего потенциал двойного слоя:

$$w = \iint_S f_1(S) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS. \qquad (XV.2)$$

Докажем несколько простых предложений, касающихся этого потенциала.

Лемма 1. Обозначим через φ угол, составленный направлением нормали в произвольной точке поверхности S, с радиусом-вектором, проведённым из этой точки в точку (x_0, y_0, z_0). Тогда потенциал двойного слоя может быть представлен в виде

$$w = \iint_S f_1(S) \frac{\cos\varphi}{r^2} dS. \qquad (XV.3)$$

Докажем формулу (XV.3). Очевидно, косинусы углов, составленных радиусом-вектором, проведённым из точки (x, y, z) в точку (x_0, y_0, z_0) с осями координат, будут соответственно равны

$$\frac{x_0 - x}{r}, \quad \frac{y_0 - y}{r}, \quad \frac{z_0 - z}{r}.$$

Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{x_0 - x}{r}\cos(nx) + \frac{y_0 - y}{r}\cos(ny) + \frac{z_0 - z}{r}\cos(nz) = -\frac{dr}{dn}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Потенциал двойного слоя сохраняет смысл, если вместо точки (x_0, y_0, z_0) подставить точку, лежащую на поверхности S.

Для доказательства этого утверждения мы подставим в формулу (XV.3) $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Выделим из поверхности S участок S_1, содержащий начало так, чтобы z на S_1 была однозначной функцией от x и y. Оставшаяся часть S_2 не влияет на сходимость интеграла.

Интеграл при этом будет иметь вид

$$w_{S_1} = \iint\limits_{S_1} f_1(S) \frac{\cos\varphi}{r^2} dS =$$

$$= -\iint\limits_{S_1} f_1(S) \left(\frac{x}{r^3}\cos(nx) + \frac{y}{r^3}\cos(ny) + \frac{z}{r^3}\cos(nz)\right) dS.$$

Оценим величину:

$$-\frac{\cos\varphi}{r^2} = \frac{x}{r^3}\cos(nx) + \frac{y}{r^3}\cos(ny) + \frac{z}{r^3}\cos(nz).$$

Мы имеем

$$\cos(nx) = \mathbf{ni}, \quad \cos(ny) = \mathbf{nj}, \quad \cos nz = \mathbf{nk},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ суть единичные векторы, направленные по координатным осям. Далее $\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}$, и поэтому

$$\cos(nx) = \mathbf{ni} = (\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)\,\mathbf{i},$$
$$\cos(ny) = \mathbf{nj} = (\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)\,\mathbf{j},$$
$$\cos(nz) = \mathbf{nk} = (\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)\,\mathbf{k} + \mathbf{n}_0\mathbf{k} = 1 + (\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)\,\mathbf{k},$$

откуда, используя условия гладкости Ляпунова, имеем:

$$\left.\begin{aligned} |\cos(nx)| &< Ar^\delta, \\ |\cos(ny)| &< Ar^\delta, \\ |\cos(nz)| &> 1 - Ar^\delta. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV.4)}$$

Оценим ещё величину z.

По теореме о конечных приращениях

$$z(x, y) = x\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\xi,\eta} + y\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\xi,\eta},$$

где ξ, η — некоторая точка внутри прямоугольника

$$0 \leqslant \xi \leqslant x, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant y.$$

Но

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(nx)}{\cos(nz)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos(ny)}{\cos(nz)},$$

откуда

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqslant \frac{Ar^{\delta}}{1-Ar^{\delta}}; \quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqslant \frac{Ar^{\delta}}{1-Ar^{\delta}}.$$

Принимая во внимание, что $|x| \leqslant \rho$, $|y| \leqslant \rho$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, получим для точек внутри шара $Ar^{\delta} < \frac{1}{2}$ неравенство

$$|z| \leqslant 4A\rho r^{\delta}. \tag{XV.5}$$

Подставляя эти оценки в выражение для $\frac{\cos\varphi}{r^2}$, получим:

$$\left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| \leqslant \frac{2A\rho}{r^{3-\delta}} + \frac{4A\rho}{r^{3-\delta}} = \frac{6A\rho}{r^{3-\delta}}. \tag{XV.6}$$

Отсюда следует интегрируемость $f_1(S)\frac{\cos\varphi}{r^2}$. Следовательно, наш интеграл действительно имеет смысл.

Как мы сейчас установим, w есть разрывная функция, которая претерпевает разрыв непрерывности при переходе через поверхность S. Обозначим через w_0 величину потенциала двойного слоя, если вместо x_0, y_0, z_0 в формулу (XV.3) подставлена точка поверхности S; w_0 есть функция точки поверхности.

Теорема 1. Функция w имеет пределы при стремлении x_0, y_0, z_0 к поверхности S извне и изнутри, причём эти пределы различны. Если предел значений w извне обозначить через w_e, а предел значений w изнутри — через w_i, то имеют место формулы:

$$\left.\begin{aligned} w_e &= -2\pi f_1(S) + w_0, \\ w_i &= 2\pi f_1(S) + w_0. \end{aligned}\right\} \tag{XV.7}$$

Для доказательства формул (XV.7) рассмотрим w. Мы будем иметь:

$$w(P) = \iint_S [f_1(S) - f_1(P_0)] \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS + \iint_S f_1(P_0) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS = $$
$$= w_1(P) + w_2(P), \tag{XV.8}$$

где через P_0 обозначена какая-нибудь фиксированная[1] точка поверхности S. Первое слагаемое в формуле (XV.8), обозначенное через $w_1(P)$, есть непрерывная функция в точке P_0. Это следует из равномерной сходимости интеграла в этой точке [см. § 1 (VII)], которую легко установить. В самом деле, окружим точку P_0 областью $\sigma(\varepsilon)$, столь малой, чтобы иметь

$$|f_1(S) - f_1(P_0)| < \varepsilon,$$

где S — точка, принадлежащая области $\sigma(\varepsilon)$.

Тогда, для любой точки P, лежащей в некоторой окрестности $h(\varepsilon)$ точки P_0, будем иметь:

$$\left|\iint_{\sigma}(f_1(S)-f_1(P_0))\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,dS\right| <$$

$$< \varepsilon\iint_{\sigma}\left|\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right|dS = \varepsilon\iint_{\sigma_1}d\omega - \varepsilon\iint_{\sigma_2}d\omega,$$

причём r — расстояние между точкой P, принадлежащей окрестности $h(\varepsilon)$ точки P_0, и точкой S на поверхности σ; через σ_1 обозначена часть σ, которая видна из точки P под положительным телесным углом, а через σ_2 — та часть σ, которая видна из P под отрицательным телесным углом. При достаточной гладкости поверхности S и во всяком случае для поверхности Ляпунова в силу условия г) оба интеграла

$$\iint_{\sigma_1}d\omega \quad \text{и} \quad \iint_{\sigma_2}d\omega$$

будут ограничены[1]). Этого достаточно для непрерывности w_1. Второе слагаемое формулы (XV.8) легко вычисляется:

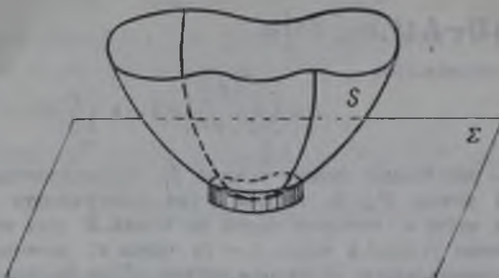
$$w_2(P) = \iint_S f_1(P_0)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,dS = f_1(P_0)\iint_S d\omega = f_1(P_0)\,\omega_S(P),$$

где $\omega_S(P)$ — величина телесного угла, под которым видна поверхность S из точки P.

Пусть w_{2e}, w_{2i}, w_0 обозначают соответственно пределы w_2 извне и изнутри и значение w при подстановке вместо точки P точки P_0 поверхности S. Чтобы разобраться в этих величинах, нам остаётся изучить поведение $\omega_S(P)$ при переходе через поверхность S в точке P_0. Пусть P пересекает S, двигаясь по какой-либо линии, некасательной к S. Рассмотрим вместо S другую поверхность $S^* = S + \sum$, где $\sum$ — неограниченно простирающаяся касательная плоскость к S; нормаль к $\sum$ мы направим обратно нормали к S. Телесный угол ω_{S^*}, под которым видна

[1]) В более подробных курсах теории потенциала, например, Gunter, La téorie du potentiel, выясняются те условия для поверхности, при которых ограниченность $\iint_S\left|\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right|dS$ имеет место.

поверхность S^* из точки (x_0, y_0, z_0), представляет собой непрерывную функцию в силу того, что поверхность S^* можно, не меняя этого угла, деформировать так, чтобы точка P_0 оказа-



Черт. 13.

лась вне её. (Например, заменив всю часть S^*, лежащую внутри цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2$, участком поверхности этого цилиндра. Черт. 13.) Очевидно,

$$(\omega_\Sigma)_e = 2\pi, \quad (\omega_\Sigma)_0 = 0, \quad (\omega_\Sigma)_i = -2\pi, \quad \omega_S = \omega_{S^*} - \omega_\Sigma,$$

откуда

$$(\omega_S)_e = -2\pi + (\omega_{S^*})_e = -2\pi + (\omega_{S^*})_0,$$
$$(\omega_S)_i = 2\pi + (\omega_{S^*})_i = 2\pi + (\omega_{S^*})_0, \quad (\omega_S)_0 = (\omega_{S^*})_0,$$

т. е.

$$(\omega_S)_e = -2\pi + (\omega_S)_0, \quad (\omega_S)_i = 2\pi + (\omega_S)_0.$$

При этом для w_2 будем иметь:

$$w_{2e} = -2\pi f_2(P_0) + (w_2)_0; \quad w_{2i} = 2\pi f_2(P_0) + (w_2)_0.$$

Из непрерывности w_1 и формулы (XV.8) сразу следует (XV.7). Так как P_0 — произвольная точка поверхности S, то наша теорема доказана.

§ 3. Свойства потенциала простого слоя.

Подобно предыдущему исследуем потенциал простого слоя. Выберем опять систему координат, как указано в начале этой лекции. Пусть:

$$v(P) = \iint\limits_S \frac{1}{r} f_1(S)\, dS.$$

Прежде всего заметим, что интеграл v — равномерно сходится в точке поверхности S, когда точка P приближается к точке поверхности по нормали n, следовательно, v — непрерывная функция, включая поверхность S.

Составим производную $\frac{\partial v}{\partial z_0}$ и займёмся её исследованием. Мы будем иметь:

$$\frac{\partial v}{\partial z_0} = \iint\limits_S \frac{z - z_0}{r^3} f_2(S)\, dS.$$

Очевидно $\frac{z-z_0}{r}$ есть взятый с обратным знаком косинус угла, составленного радиусом-вектором, проведённым из точки (x, y, z) в точку (x_0, y_0, z_0) с направлением оси z.

Поэтому, обозначив этот угол через ψ_0, можем записать $\frac{\partial v}{\partial z_0}$ в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial z_0} = -\iint\limits_S f_2(S) \frac{\cos \psi_0}{r^2}\, dS. \tag{XV.9}$$

Докажем два утверждения:

Лемма 3. Интеграл (XV.9) сохраняет смысл, если в него вместо (x_0, y_0, z_0) подставить точку поверхности.

В самом деле, полагая $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ в формуле (XV.9) и пользуясь тем, что

$$|z| < M\rho r^k; \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

[см. (XV.5)], легко докажем это утверждение.

Будем обозначать такой интеграл через

$$\frac{dv}{dn_0} = \iint\limits_S \frac{d\frac{1}{r}}{dn_0} f_2(S)\, dS.$$

Обозначим через $\frac{dv(P_0)}{dn_i}$ и $\frac{dv(P_0)}{dn_e}$ соответственно предельные значения нормальной производной при приближении точки P к точке поверхности P_0 изнутри S и извне S.

Теорема 2. Имеют место следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dn_e} &= 2\pi f_2(P_0) + \frac{dv}{dn_0}, \\ \frac{dv}{dn_i} &= -2\pi f_2(P_0) + \frac{dv}{dn_0}. \end{aligned}\right\} \tag{XV.10}$$

Для доказательства мы сравним $\frac{\partial v}{\partial z_0}$ с потенциалом двойного слоя с плотностью $-f_2(S)$.

Составим

$$\frac{\partial v}{\partial z_0} - w = \iint_S f_2(S) \frac{\cos\varphi - \cos\psi_0}{r^2}\, dS. \tag{XV.11}$$

Мы докажем, что эта разность непрерывна в точке (0, 0, 0).

В самом деле,

$$\frac{\cos\varphi - \cos\psi_0}{r^2} = -\frac{x - x_0}{r^3}\cos(nx) - \frac{y - y_0}{r^3}\cos(ny) - \frac{z - z_0}{r^3}[\cos(nz) - 1].$$

Для простоты положим, что точка x_0, y_0, z_0 движется по нормали к поверхности, т. е. $x_0 = y_0 = 0$.

При этом

$$\frac{\cos\varphi - \cos\psi_0}{r^2} = -\frac{x\cos(nx)}{r^3} - \frac{y\cos(ny)}{r^3} - \frac{z - z_0}{r^3}[\cos(nz) - 1].$$

Обозначая расстояние между точками (0, 0, 0) и (x, y, z) через $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и пользуясь неравенством

$$|z| < A\rho r_1^{\delta}$$

[см. (XV.5)], мы заметим, что $r_1 < A_1\rho$, где A_1 — постоянная; поэтому неравенства (XV.4) могут быть записаны так:

$$|x\cos(nx)| < A_2\rho^{1+\delta}; \quad |y\cos(ny)| < A_2\rho^{1+\delta},$$

$$|1 - \cos(nz)| < A_2\rho^{\delta},$$

где A_2 — постоянная.

Замечая ещё, что

$$|z - z_0| < r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2},$$

мы получаем:

$$\left|\frac{\cos\varphi - \cos\psi_0}{r^2}\right| < \frac{2A_2\rho^{1+\delta}}{r^3} + \frac{A_2\rho^{\delta}}{r^2} < \frac{3A_2}{\rho^{2-\delta}}.$$

Значит, интеграл (XV.11) сходится равномерно по отношению к параметру z_0 и представляет собой непрерывную функцию в точке $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Отсюда следует

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z_0} - w\right)_{z_0 = +0} = \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} - w\right)_{z_0 = -0} = \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} - w\right)_{z_0 = 0}.$$

откуда, пользуясь теоремой (XV.1), сразу следуют формулы (XV.10).

Теорема 3. Для любой ограниченной $f_2(S)$ функция $\frac{dv}{dn}$ удовлетворяет неравенству:

$$\left|\left|\frac{dv}{dn_0}\right|_{P_1}-\left|\frac{dv}{dn_0}\right|_{P_2}\right|\leqslant Kr_3^{\frac{\delta}{2}},$$

где K — постоянная, P_1 и P_2 — любые две точки с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, лежащие на поверхности S, а

$$r_3^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2.$$

Оценим интеграл

$$\iint\limits_S \left|\frac{\cos\psi_1}{r_1^2}-\frac{\cos\psi_2}{r_2^2}\right| dS,$$

$$\text{где } \begin{cases} r_1^2=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2, \\ r_2^2=(x_2-x)^2+(y_2-y)^2+(z_2-z)^2. \end{cases}$$

Обозначим единичный вектор нормали в точке P_1 через $\mathbf{n}_1$, а вектор нормали в точке P_2 через $\mathbf{n}_2$. Мы должны будем оценить интеграл:

$$\iint\limits_S \left|\frac{\mathbf{r}_1\mathbf{n}_1}{r_1^3}-\frac{\mathbf{r}_2\mathbf{n}_2}{r_2^3}\right| dS.$$

Окружим точку P_1 шаром радиуса $2r_3$. Пусть S_1 — часть поверхности S, попадающая внутрь этого шара, а S_2 — остальная часть. Оценим порознь интегралы

$$I_1=\iint\limits_{S_1} \left|\frac{\mathbf{r}_1\mathbf{n}_1}{r_1^3}-\frac{\mathbf{r}_2\mathbf{n}_2}{r_2^3}\right| dS,\quad I_2=\iint\limits_{S_2} \left|\frac{\mathbf{r}_1\mathbf{n}_1}{r_1^3}-\frac{\mathbf{r}_2\mathbf{n}_2}{r_2^3}\right| dS.$$

Оценим прежде всего I_1. Векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ образуют треугольник и, следовательно, $r_2+r_3>r_1$. Отсюда вытекает, что при $r_3<\frac{r_1}{2}$ будем иметь $r_2>\frac{r_1}{2}$.

Далее, используя оценку (XV.5), получим $|\mathbf{r}_1\mathbf{n}_1-\mathbf{r}_2\mathbf{n}_1|=$ $=|\mathbf{r}_3\mathbf{n}_1|\leqslant Ar_3^{1+\delta}$, $|\mathbf{r}_1\mathbf{n}_1|\leqslant Ar_1^{1+\delta}$, а из условий Ляпунова следует:

$|\mathbf{r}_2\mathbf{n}_1-\mathbf{r}_2\mathbf{n}_2|=|\mathbf{r}_2(\mathbf{n}_1-\mathbf{n}_2)|\leqslant Ar_2r_3^\delta$, и, значит, при $r_1>2r_3$

$$\left|\frac{(\mathbf{r}_1\mathbf{n}_1)}{r_1^3}-\frac{(\mathbf{r}_2\mathbf{n}_2)}{r_2^3}\right|<\frac{|(\mathbf{r}_1\mathbf{n}_1)-(\mathbf{r}_2\mathbf{n}_1)|}{r_2^3}+\frac{|(\mathbf{r}_2\mathbf{n}_1)-(\mathbf{r}_2\mathbf{n}_2)|}{r_2^3}+(\mathbf{r}_1\mathbf{n}_1)\left|\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right|<$$

$$<\frac{Ar_3^{1+\delta}}{r_2^3}+\frac{Ar_3^\delta}{r_2^2}+Ar_1^{1+\delta}|r_2-r_1|\frac{r_2^2+r_1r_2+r_1^2}{r_1^3r_2^3}<$$

$$<Ar_3^\delta\left[\frac{r_3}{r_2^3}+\frac{1}{r_2^2}+r_3^{1-\delta}r_1^{1+\delta}\left(\frac{1}{r_1^3r_2}+\frac{1}{r_1^2r_2^2}+\frac{1}{r_1r_2^3}\right)\right]\leqslant Ar_3^\delta\frac{22}{r_1^2}.$$

Пользуясь этим и замечая, что[1] $\iint\limits_{S_2}\frac{dS}{r_1^2}\leqslant c_1r_3^{-\frac{\delta}{2}}$,

получим $\quad I_2=c_4r_3^{\frac{\delta}{2}}$.

Оценить интеграл I_1 нетрудно; используя (XV.6), имеем:

$$\left|\iint\limits_{S_1}\frac{\cos\psi_1}{r_1^2}\,dS\right|\leqslant A\iint\limits_{S_1}r_1^{\delta-2}\,dS\leqslant c_5r_3^\delta,$$

$$\iint\limits_{S_1}\left|\frac{\cos\psi_2}{r_2^2}\right|dS\leqslant\iint\limits_{r_2\leqslant 3r_3}\left|\frac{\cos\psi_2}{r_2^2}\right|dS\leqslant A\iint\limits_{r_2\leqslant 3r_3}r_2^{\delta-2}dS\leqslant c_6r_3^\delta.$$

Сопоставляя эти оценки, будем иметь:

$$|I_1|+|I_2|\leqslant c_7r_3^{\frac{\delta}{2}}.$$

Доказательство теоремы 3 теперь очевидно.

Пусть $|f_2|\leqslant M$. Имеем:

$$\left|\frac{dv}{dn_0}\right|_{P_1}-\frac{dv}{dn_0}\Big|_{P_2}\Big|=$$

$$=\left|\iint\limits_{S}f_2(S)\left[\frac{\cos\psi_1}{r_1^2}-\frac{\cos\psi_2}{r_2^2}\right]dS\right|\leqslant M\left[|I_1|+|I_2|\right]\leqslant Kr_3^{\frac{\delta}{2}},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. Если плотность простого слоя удовлетворяет условию

$$|f_2(P_1)-f_2(P_2)|\leqslant Kr_3^{\delta_1}, \qquad \text{(XV.12)}$$

---

[1] Оценка эта следует из того, что при соответствующем выборе координатной системы ($x_1=y_1=0$) имеем:

$$\iint\limits_{S_2}\frac{dS}{r_1^2}<\iint\limits_{A>\rho>\frac{1}{2}r_3}\frac{dx\,dy}{\rho^2}+K,\text{ где }\rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

где $\delta_1 > 0$, а r_2 — расстояние между точками P_1 и P_2, то потенциал будет иметь непрерывные вплоть до контура производные первого порядка по направлению, параллельному касательной плоскости с обеих сторон рассматриваемой поверхности.

Выберем опять начало координат в исследуемой точке P_1 поверхности и за плоскость XOY возьмём касательную плоскость к поверхности.

Рассмотрим производную

$$\frac{\partial v}{\partial x_0}=\iint\limits_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_0} f_1(S)\,dS$$

в некоторой точке P_0 с координатами 0, 0, z_0, лежащей на нормали. Докажем, что эта производная непрерывна на всей нормали, в том числе и при $z_0=0$.

В самом деле, мы имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial x_0}=\iint\limits_S \frac{x}{r^3} f_1(S)\,dS.$$

Построим вокруг оси z цилиндр радиуса h такой, что в точках куска S^* поверхности S, попавшего внутрь этого цилиндра в окрестности P_0, нормаль к S образует угол с осью z, не превосходящий $\frac{\pi}{4}$. Покажем, что при этом: $|z| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}=\rho$.

В самом деле $z=\int\limits_0^\rho \frac{dz}{d\rho}\,d\rho$, $|z| \leqslant \rho \max\left|\frac{dz}{d\rho}\right|$. Но в силу условия

$$|\cos nz|=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

имеем: $\left|\frac{dz}{d\rho}\right| < \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} < 1$, откуда и следует наше неравенство.

Пусть $r^*=\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}$. Построим интеграл:

$$\iint\limits_{S^*} f_1(P_1)\frac{x}{r^{*3}}\cos(nz)\,dS.$$

Этот интеграл, очевидно, равен нулю, ибо его можно переписать в виде

$$f_1(P_1)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2} \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z_0^2)^3}}\,dx\,dy,$$

где под интегралом стоит нечётная функция от x.

Очевидно, непрерывность $\frac{\partial v}{\partial x_0}$ будет установлена, если мы докажем непрерывность интеграла

$$\iint\limits_{S^*} x\left(\frac{f_2(S)}{r^3}\right) dS \quad \text{или} \quad \iint\limits_{S^*} x\left(\frac{f_2(S)}{r^3}-\frac{f_2(P)\cos(nz)}{r^{*3}}\right) dS. \quad \text{(XV.13)}$$

Нетрудно убедиться в равномерной сходимости в точке P_1 этого последнего интеграла. В самом деле, имеем:

$$\frac{f_2(S)}{r^3}-\frac{f_2(P_1)}{r^{*3}}\cos nz=$$
$$=\frac{f_2(S)-f_2(P_1)}{r^3}+\frac{f_2(P_1)[1-\cos nz]}{r^3}+$$
$$+f_2(P_1)\cos nz\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^{*3}}\right). \quad \text{(XV.14)}$$

Оценим порознь каждое из слагаемых правой части формулы (XV.14). Мы имеем: $r=\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}\geqslant\rho$; $r^*>\rho$;

$$r_3=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant\sqrt{2}\rho,$$
$$\left|\frac{f_2(S)-f_2(P_1)}{r^3}\right|\leqslant\frac{Kr_3^{\delta_1}}{3}\leqslant\frac{K_1}{\rho^{3-\delta_1}}.$$

Из (XV.4) следует:

$$\left|\frac{f_2(P_1)(1-\cos nz)}{r^3}\right|\leqslant|f_2(P_1)|\,A\frac{\rho^\delta}{r^3}\leqslant\frac{K_2}{\rho^{3-\delta}}.$$

Далее,

$$\left|\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^{*3}}\right|=|r-r^*|\left\{\frac{1}{r^3r^*}+\frac{1}{r^2r^{*2}}+\frac{1}{rr^{*3}}\right\}.$$

Разность векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}^*$ представляет собой отрезок длины z. Поэтому в силу (XV.5)

$$|r-r^*|\leqslant|z|\leqslant K\rho r_3^\delta.$$

Пользуясь этим, имеем:

$$\left|\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^{*3}}\right|\leqslant K_3\rho\, r_3^\delta\left\{\frac{1}{r^3r^*}+\frac{1}{r^2r}+\frac{1}{r^1r^{*3}}\right\}\leqslant K_4\frac{1}{\rho^{3-\delta}}.$$

Возвращаясь к интегралу (XV.13), мы видим, что он может быть переписан в виде

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\frac{x}{\cos nz}\left(\frac{f_2(S)}{r^3}-\frac{f_2(P_1)\cos nz}{r^{*3}}\right)dx\,dy.$$

Подинтегральная функция в этом интеграле не превосходит

$$\sqrt{2}\rho\left(\frac{K_1+K_2+K_4}{\rho^{3-\delta}}\right)=\frac{K_5}{\rho^{2-\delta}}.$$

Следовательно, интеграл сходится равномерно.

Мы установили, что при стремлении точки P_0 по нормали к точке поверхности все первые производные от потенциала простого слоя стремятся к определённому конечному пределу.

Из нашего доказательства вытекает, между прочим, что это стремление будет равномерным по отношению к точке поверхности. Следовательно, производные первого порядка от потенциала простого слоя будут в наших предположениях непрерывны вплоть до границы, что и доказывает нашу теорему.

§ 4. Поведение потенциалов в бесконечности.

Последнее важное свойство потенциалов простого и двойного слоёв, которое мы сейчас разберём, это — их поведение на бесконечности.

Мы докажем, что если поверхность S ограничена, потенциал простого слоя убывает на бесконечности по крайней мере, как $\frac{1}{R_0}$, а потенциал двойного слоя по крайней мере, как $\frac{1}{R_0^2}$, где $R_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

В самом деле, очевидно, что при достаточно большом R_0 получим:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = \\ &= \sqrt{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)-2(xx_0+yy_0+zz_0)+(x^2+y^2+z^2)} = \\ &= \sqrt{1-\frac{2(xx_0+yy_0+zz_0)-(x^2+y^2+z^2)}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}\;\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2} > \\ &> R_0\sqrt{1-\frac{2RR_0-R^2}{R_0^2}} > \frac{1}{2}R_0; \end{aligned}$$

Значит,

$$|v| = \left|\iint\limits_S \frac{1}{r} f_1(S)\,dS\right| < \frac{2}{R_0}\iint\limits_S |f_1(S)|\,dS,$$

$$|w| = \left|\iint\limits_S \frac{\cos\varphi}{r^2} f_2(S)\,dS\right| < \frac{4}{R_0^2}\iint\limits_S |f_2(S)|\,dS,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ XVI.

СВЕДЕНИЕ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА.

§ 1. Постановка задачи единственность их решений.

Пусть S — замкнутая, достаточно гладкая поверхность. Обозначим через Ω_1 объём, ограниченный этой поверхностью, а через Ω_2 бесконечную область, внешнюю по отношению к S, также ограниченную поверхностью S.

Рассмотрим четыре задачи:

1. Внутренняя задача Дирихле. Найти функцию u, гармоническую в Ω_1, при условии

$$u|_S = f_1(S);$$

2. Внешняя задача Дирихле. Найти функцию u, гармоническую в Ω_2, при условиях:

а) $u|_S = f_1(S)$,

б) $\lim\limits_{R\to\infty} u = 0$;

3. Внутренняя задача Неймана. Найти функцию u, гармоническую в Ω_1, при условии

$$\left.\frac{du}{dn}\right|_S = f_2(S);$$

4. Внешняя задача Неймана. Найти функцию u, гармоническую в Ω_2, при условиях:

а) $\left.\frac{du}{dn}\right|_S = f_2(S)$,

б) $\lim\limits_{R\to\infty} u = 0$.

Прежде чем намечать пути решения этих задач, займёмся их исследованием. Докажем несколько теорем.

Теорема 1. Решение задачи Дирихле, внутренней или внешней, единственно.

Доказательство совершенно очевидно. Оно вытекает из принципа максимума. Разность двух решений в случае внутренней задачи будет гармонической функцией, равной нулю на S; в случае внешней задачи разность двух решений будет равна нулю на S и на бесконечности. Следовательно, разность решений не может принимать внутри области ни положительных, ни отрицательных значений, ибо иначе она достигала бы там своего максимума или своего минимума, что невозможно. Значит, в обоих случаях разность решений равна нулю.

Теорема 2. Решение внешней задачи Неймана, имеющее непрерывные вплоть до границы производные 1-го порядка, единственно, решение внутренней задачи определено с точностью до произвольной постоянной.

Разберём сначала внутреннюю задачу. Составим интеграл:

$$\iint_S v\frac{dv}{dn}dS=$$

$$=-\iiint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz=$$

$$=-\iiint_{\Omega_1}\left[v\,\Delta v+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Если теперь v — гармоническая функция и $\frac{dv}{dn}$ обращается в нуль на контуре, то

$$\iiint_{\Omega_1}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz=0,$$

и, значит,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}=0.$$

Отсюда следует, что v — постоянная.

Если теперь u_1 и u_2 будут два решения задачи Неймана, то их разность v будет гармонической функцией, у которой $\frac{dv}{dn}$ на контуре равно нулю. Такая функция есть постоянная. Теорема доказана.

Как мы установим впоследствии, внутренняя задача Неймана разрешима не всегда: необходимым и достаточным условием её разрешимости является равенство

$$\iint_S f_2(S)\, dS = 0.$$

Для рассмотрения внешней задачи возьмём сферу Σ радиуса A, где A — достаточно большое число, и пусть Ω_2 — объём, заключённый между Σ и S.

По предыдущему

$$\iint_\Sigma v\frac{dv}{dn}dS + \iint_S v\frac{dv}{dn}dS =$$

$$= -\iiint_{\Omega_2} \left[v\,\Delta v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] dx\,dy\,dz.$$

Если v — гармоническая функция, уничтожающаяся на бесконечности, и притом такая, что $\left.\frac{dv}{dn}\right|_S = 0$, то левая часть последнего равенства сколь угодно мала. В самом деле, в силу теоремы 1 (XII) на Σ имеем:

$$|v| \leqslant \frac{M}{A}, \quad \left|\frac{dv}{dn}\right| \leqslant \frac{M}{A^2}$$

и

$$\left|\iint_\Sigma v\frac{dv}{dn}dS\right| \leqslant \frac{M^2}{A^3}\iint_\Sigma dS = 4\pi\frac{M^2}{A}.$$

Значит,

$$\iiint_{\Omega_2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] dx\,dy\,dz < \varepsilon,$$

что возможно лишь при условии

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Значит, v есть постоянная. Но эта постоянная может быть только нулём, так как иначе она не стремилась бы к нулю на бесконечности.

Разность двух решений внешней задачи Неймана есть поэтому нуль, и решение задачи Неймана единственно.

§ 2. Интегральные уравнения для поставленных задач.

Полученные нами на предыдущей лекции свойства потенциалов позволяют решать задачи Дирихле и Неймана для любых областей, ограниченных достаточно гладкими поверхностями при помощи приведения их к интегральным уравнениям.

В самом деле, пусть мы хотим найти, например, решение внутренней задачи Дирихле. Будем предполагать, что искомая функция u есть потенциал двойного слоя w с неизвестной пока плотностью $\mu(S)$:

$$u = w = \iint_S \frac{\mu(S_1)\cos\varphi}{r^2}\, dS_1.$$

Мы должны подчинить w тому условию, чтобы её предельное значение изнутри равнялось $f_1(S)$:

$$w_i = f_1(S).$$

Из равенств (XV.4) имеем

$$w_i = 2\pi\mu(S) + w_0 = 2\pi\mu(S) + \iint_S \frac{\mu(S_1)\cos\varphi}{r^2}\, dS_1,$$

где r—расстояние между двумя точками S и S_1 нашей поверхности. Таким образом, для $\mu(S)$ получим уравнение:

$$\mu(S) = \frac{f_1(S)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\mu(S_1)\cos\varphi}{r^2}\, dS_1. \tag{XVI.1}$$

Если для сокращения письма обозначить $\frac{1}{2\pi} f_1(S)$ через $F_1(S)$, а $\frac{1}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2}$—через $K(S, S_1)$ (это последнее выражение есть, очевидно, функция двух точек S и S_1 на поверхности), то мы придём к уравнению

$$\mu(S) = F_1(S) - \iint_S K(S, S_1)\,\mu(S_1)\, dS_1. \tag{XVI.2}$$

Интегральные уравнения такого вида называются интегральными уравнениями типа Фредгольма 2-го рода. К изучению таких уравнений мы вскоре перейдём.

Так же точно можно свести и задачу Дирихле для внешней области, ограниченной поверхностью S, т. е. для бесконечной области, границей которой служит S, опять к уравнению Фредгольма 2-го рода.

В самом деле, отыскивая решение снова в виде потенциала двойного слоя из условия $w_e = f_1(S)$, получим, аналогично прежнему, для неизвестной плотности $\mu(S)$

$$w_e = -2\pi\mu(S) + w_0,$$

откуда

$$\mu(S) = -\frac{f_1(S)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\mu(S_1)\cos\varphi}{r^2}\,dS;$$

обозначая $-\frac{f_1(S)}{2\pi}$ через $\Phi_1(S)$, получим:

$$\mu(S) = \Phi_1(S) + \iint_S K(S, S_1)\,\mu(S_1)\,dS. \tag{XVI.3}$$

Это уравнение есть уравнение того же типа и рода, что и предыдущее.

К интегральным уравнениям приводится и решение задачи Неймана для внутренности и для внешности поверхности.

Будем искать решение *внутренней задачи Неймана* в виде потенциала простого слоя:

$$u = v = \iint_S \frac{\nu(S_1)}{r}\,dS_1,$$

аналогично прежнему

$$\frac{dv}{dn_i} = -2\pi\nu(S) + \frac{dv}{dn_0} = f_2(S),$$

откуда

$$\nu(S) = -\frac{f_2(S)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\nu(S_1)\cos\psi_0}{r^2}\,dS_1. \tag{XVI.4}$$

Угол ψ_0 получается из угла φ заменой положения точки S на S_1. Поэтому, полагая $-\frac{f_2(S)}{2\pi} = F_2(S)$, получим для $\nu(S)$ уравнение:

$$\nu(S) = F_2(S) + \iint_S K(S_1, S)\,\nu(S_1)\,dS_1. \tag{XVI.5}$$

Наконец, если искать решение *внешней задачи Неймана* в виде потенциала простого слоя v, будем иметь:

$$\frac{dv}{dn_e} = 2\pi\nu(S) + \iint_S \nu(S_1)\frac{\cos\psi_0}{r^2}\,dS_1 = f_2(S)$$

или

$$\nu(S)=\frac{f_2(S)}{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{\nu(S_1)\cos\psi_2\,dS_1}{r^2}.$$

Полагая

$$\frac{f_2(S)}{2\pi}=\Phi_2(S),$$

получим для $\nu(S)$ уравнение:

$$\nu(S)=\Phi_2(S)-\iint\limits_S K(S_1, S)\,\nu(S_1)\,dS_1. \qquad \text{(XVI.6)}$$

Если нам удастся найти функции μ и ν, удовлетворяющие уравнениям (XVI.2), (XVI.3), (XVI.5) или (XVI.6), то соответствующие задачи математической физики будут решены.

ЛЕКЦИЯ XVII.

УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА НА ПЛОСКОСТИ.

§ 1. Фундаментальное решение.

Мы разобрали довольно подробно уравнения Лапласа и Пуассона в пространстве. На практике часто бывает, что функция u не зависит от одного из переменных, например, z; тогда

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

При этом уравнения переходят в уравнения с двумя независимыми переменными. Те же самые задачи, которые мы ставили для пространства, мы можем теперь ставить на плоскости XOY для уравнения

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\rho(x, y),$$

где $\rho(x, y)$ может иногда равняться нулю.

Рассмотрим некоторые специфические свойства таких задач.

Совершенно так же, как и в пространстве, легко доказать, что функция, гармоническая в некоторой области D плоскости xOy, достигает своего максимального и минимального значений на контуре этой области. Отсюда следует, при помощи повторения прежних рассуждений, единственность решения задачи Дирихле для любой ограниченной области. Однако, как мы увидим далее, в отличие от прежнего, задача Дирихле для неограниченной области в прежней постановке смысла не имеет. Ставить вопрос об отыскании гармонической функции, равной нулю на бесконечности, здесь нельзя, и вопрос о единственности такого решения лишён содержания.

Аналогично леммам, доказанным нами в лекции IX, мы имеем здесь две другие леммы.

Лемма 1. Функция $\ln\frac{1}{r}=-\ln r$ есть гармоническая функция переменных x и y, где

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2};$$

В самом деле,

$$-\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(x-x_0)^2}{r^4},$$

$$-\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2(y-y_0)^2}{r^4},$$

откуда

$$\Delta \ln \frac{1}{r} = 0.$$

Лемма 2. Для любой непрерывной со своими производными 2-го порядка функции имеет место формула

$$u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_D \ln \frac{1}{r} \Delta u \, dx \, dy + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_s \left(u \frac{d \ln \frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) ds, \qquad \text{(XVII.1)}$$

где D — некоторая область, содержащая внутри себя точку (x_0, y_0), а s — контур этой области.

Если точка (x_0, y_0) лежит вне области D, то формула (XVII.1) заменяется другой:

$$-\frac{1}{2\pi} \iint\limits_D \ln \frac{1}{r} \Delta u \, dx \, dy + \frac{1}{2\pi} \int\limits_s \left(u \frac{d \ln \frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) ds = 0. \qquad \text{(XVII.2)}$$

Доказательство этих формул не представляет труда, совпадая слово в слово с уже проведённым однажды доказательством аналогичной формулы в пространстве. Мы не будем приводить этого доказательства.

Так же, как и раньше, можно доказать, что если функция u имеет начало координат особой точкой и в окрестности начала является гармонической, причём удовлетворяет неравенству

$$|u| \leqslant \frac{A}{R^l},$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, то её можно представить в виде

$$u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^m \ln \frac{1}{R}}{\partial x^i \partial y^j} + u^*, \qquad i + j = m, \qquad \text{(XVII.3)}$$

где u^* — гармоническая функция во всей области, включая начало координат.

Справедливы теоремы:

Теорема 1. Если $u(R, \vartheta)$ — гармоническая функция, то и $v(R, \vartheta) = u\left(\frac{1}{R}, \vartheta\right)$ гармонична, где R и ϑ — полярные координаты на плоскости.

Теорема 2. Если $u(R, \vartheta)$ гармонична при больших значениях R и удовлетворяет неравенству

$$|u| \leqslant AR^n,$$

то её можно представить в виде

$$u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} R^{2m} \frac{\partial^m \ln \frac{1}{R}}{\partial x^i \partial y^j} + u^*,$$

где u^* ограничена.

§ 2. Основные задачи.

Задача о нахождении решения уравнения Пуассона

$$\Delta u = \rho(x, y)$$

на всей плоскости, обращающегося в нуль на бесконечности для уравнения с двумя переменными, вообще говоря, не разрешима, и мы не будем её касаться. Заметим, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho \ln \frac{1}{r}\, dx\, dy$, распространённый по всей плоскости (если ρ отлично от нуля лишь в конечной области, то область будет фактически конечной), есть всё же частное решение уравнения Пуассона, но, вообще говоря, неограниченно растущее на бесконечности. Этот интеграл называется логарифмическим потенциалом распределённых масс.

Задача Дирихле для полуплоскости имеет смысл. Пусть функция $f_1(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|f_1(x)| < \frac{A}{x^{\alpha}}, \quad \text{где } 0 < \alpha.$$

Решение уравнения

$$\Delta u = 0$$

при условии

$$u|_{y=0} = f_1(x),$$

обращающееся в нуль на бесконечности, имеет вид:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \ln \frac{1}{r}}{dn} f_1(x)\, dx.$$

Доказательство слушатель легко проведёт сам.

Задача Неймана для полуплоскости не только равных нулю на бесконечности, но даже и просто ограниченных решений не имеет. Мы не будем её касаться.

Задача Дирихле для круга решается приёмом, аналогичным прежнему.

Если точка (x_1, y_1) — сопряжённая по отношению к точке (x_0, y_0), т. е.

$$x_1 = \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \quad y_1 = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2},$$

то на круге радиуса 1 попрежнему $r = R_0 r_1$, где

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2},$$

а R_0 — радиус-вектор точки (x_0, y_0).

Пусть (x_0, y_0) — внутренняя точка круга $R \leqslant 1$. Применяя формулу Грина к решению уравнения $\Delta u = \rho$, будем иметь:

$$u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R \leq 1} \ln \frac{1}{r} \rho\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R=1} \left(u \frac{d \ln \frac{1}{r}}{dn} - \ln \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) ds. \quad \text{(XVII.4)}$$

Применим теперь формулу Грина, подставив вместо r величину $R_0 r_1$. Ввиду того, что (x_1, y_1) лежит вне круга, функция $\ln \frac{1}{R_0 r_1}$ — гармоническая везде внутри, и мы получим:

$$-\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R \leq 1} \ln \frac{1}{R_0 r_1} \rho\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R=1} \left(u \frac{d \ln \frac{1}{R_0 r_1}}{dn} - \ln \frac{1}{R_0 r_1} \frac{du}{dn} \right) ds = 0. \quad \text{(XVII.5)}$$

Вычитая формулу (XVII.5) из (XVII.4) и обозначая

$$G(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_0 r_1} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r},$$

получим формулу:

$$u(x_0, y_0) = \iint\limits_{R \leq 1} \rho G(x, y, x_0, y_0)\, dx\, dy - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R=1} u \frac{dG}{dn}\, ds. \quad \text{(XVII.6)}$$

Функция Грина G — симметрическая функция точек (x, y) и (x_0, y_0); следовательно, она гармоническая по x_0, y_0 и обращается в тождественный нуль по x, y, если (x_0, y_0) лежит на контуре.

Если задача отыскания решения уравнения Пуассона, удовлетворяющего условию

$$u|_s = f_1(s), \quad \text{(XVII.7)}$$

имеет решение, то это решение должно иметь вид (XVII.6). С помощью подстановки новой неизвестной функции можно всегда свести задачу к такой, где условие (XVII.7) заменено однородным:

$$u|_s = 0.$$

Решение этой последней задачи даётся формулой

$$u(x_0, y_0) = \iint\limits_{R \leq 1} \rho G\, dx\, dy \quad \text{(XVII.8)}$$

и, следовательно, существует. В самом деле,

$$\iint\limits_{R \leq 1} \rho G\, dx\, dy = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R \leq 1} \rho \ln \frac{1}{r}\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R \leq 1} \rho \ln \frac{1}{R_0 r_1}\, dx\, dy.$$

Первое слагаемое, являясь логарифмическим потенциалом распределённых масс, удовлетворяет уравнению

$$\Delta v = \rho,$$

а второе — гармоническая функция.

Следовательно, формула (XVII.8) даст решение уравнения Пуассона. Непосредственно видно, что это решение удовлетворяет условию $u|_s = 0$.

Отсюда следует, что и общая задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет решение, даваемое формулой (XVII.6), при $\rho = 0$.

В полярных координатах, заменяя x, y через R и θ, а x_0, y_0 — через R_0, θ_0, получим для координат точки x_1, y_1 выражение $\frac{1}{R_0}$, θ_0.

При этом

$$\ln \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \ln (R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos (\theta - \theta_0)),$$

$$\ln \frac{1}{R_0 r_1} = -\frac{1}{2} \ln (R^2 R_0^2 - 2RR_0 \cos (\theta - \theta_0) + 1).$$

Тогда функция Грина запишется в виде:

$$G = \frac{1}{4\pi} \{\ln [R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos (\theta - \theta_0)] - \\ - \ln [R^2 R_0^2 - 2RR_0 \cos (\theta - \theta_0) + 1]\}$$

и

$$-\frac{dG}{dn}\bigg|_{R=1} = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{-R + R_0 \cos (\theta - \theta_0)}{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos (\theta - \theta_0)} - \right. \\ \left. - \frac{-RR_0^2 + R_0 \cos (\theta - \theta_0)}{R^2 R_0 - 2RR_0 \cos (\theta - \theta_0) + 1} \right]_{R=1} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - R_0^2}{R_0 - 2R_0 \cos (\theta - \theta_0) + 1}.$$

Решение задачи Дирихле для круга даётся при этом формулой

$$u (R_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - R_0^2}{R_0^2 - 2R_0 \cos (\theta - \theta_0) + 1} f_1 (\theta) \, d\theta.$$

Эта формула называется *формулой Пуассона.*

Аналогично решается задача Дирихле для внешности круга.

Эта задача ставится как задача отыскания функции u, гармонической вне круга

$$R = 1,$$

удовлетворяющей условию $u|_s = f_1(s)$ и *ограниченной* на бесконечности. Это последнее условие существенно отличает задачу Дирихле для плоскости от задачи Дирихле в пространстве. Мы не будем останавливаться на решении этой задачи.

Формула, дающая решение этой задачи, будет иметь вид:

$$u (R_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R_0^2 - 1}{R_0^2 - 2R_0 \cos (\theta - \theta_0) + 1} f_1 (\theta) \, d\theta.$$

Из формулы Пуассона для гармонических функций внутри и вне круга следуют, почти без изменения в способе доказательства, все те же следствия, что и для пространственной задачи.

§ 3. Логарифмический потенциал.

На функции двух переменных можно перенести также понятие о потенциалах.

Интеграл вида

$$v = \int_s \ln \frac{1}{r} \mu(s)\, ds$$

называется логарифмическим потенциалом простого слоя. Это — гармоническая функция вне и внутри области D, ограниченной контуром s. Функция эта непрерывна при переходе через s, а её нормальная производная терпит разрыв непрерывности.

Если составить интеграл

$$\int_s \frac{d \ln \frac{1}{r}}{dn} \mu(s)\, ds,$$

где производные взяты при изменении x_0 и y_0, то он оказывается имеющим смысл в случае, если (x_0, y_0) лежит на границе. Обозначая его величину через $\left.\frac{dv}{dn}\right|_0$, получим:

$$\left.\frac{dv}{dn}\right|_e = \pi\mu + \left.\frac{dv}{dn}\right|_0,$$

$$\left.\frac{dv}{dn}\right|_i = -\pi\mu + \left.\frac{dv}{dn}\right|_0.$$

$\left.\frac{dv}{dn}\right|_0$ можно представить в виде

$$\left.\frac{dv}{dn}\right|_0 = \int_s \mu \frac{\cos\psi_0}{r}\, ds,$$

где угол ψ_0 есть угол, составленный радиусом-вектором, проведённым из точки (x, y) в точку (x_0, y_0) с направлением нормали в этой последней точке. Функция $\frac{\cos\psi_0}{r}$ есть ограниченная функция, если только линия s достаточно гладкая.

Логарифмический потенциал простого слоя, вообще говоря, не ограничен на бесконечности. Интеграл вида

$$w = \int_s \frac{d \ln \frac{1}{r}}{dn} \mu(s)\, ds = \int_s \frac{\mu(s)\cos\varphi}{r}\, ds,$$

где φ — угол, составленный радиусом-вектором, проведённым из точки (x, y) в точку (x_0, y_0) с направлением нормали в точке (x, y), называется логарифмическим потенциалом двойного слоя.

Это — гармоническая функция как внутри, так и вне области D, ограниченной контуром s. На контуре s эта функция терпит разрыв непрерывности.

Если (x_0, y_0) лежит на контуре, который мы предполагаем достаточно гладким, то $\frac{\cos\varphi}{r}$ — ограниченная функция, и интеграл w имеет смысл. Обозначая при этом его величину через w_0, будем иметь

$$w_e = -\pi\mu + w_0,$$
$$w_i = \pi\mu + w_0.$$

Логарифмический потенциал двойного слоя равен нулю на бесконечности.

Аналогично пространственному случаю можно поставить задачи Дирихле и Неймана также и для плоскости. При этом, однако, будут некоторые особенности во внешних задачах.

Во внешней задаче Дирихле вместо обращения u в нуль на бесконечности нужно требовать ограниченности этой функции в окрестности бесконечно удалённой точки.

При этом задача Дирихле получает определённое и единственное решение. Во внешней задаче Неймана нужно попрежнему искать решение, равное нулю на бесконечности, но, в отличие от прежнего, эта задача уже не будет, вообще говоря, иметь решения.

Необходимое и достаточное условие существования такого решения будет:

$$\int_l f_2(s)\,ds = 0,$$

где $f_2(s)$ — значения нормальной производной на контуре.

В этом смысле плоские задачи, внутренние и внешние, более сходны между собой, чем пространственные.

Можно аналогично прежнему свести задачу Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям. Мы предоставляем сделать это читателю.

ЛЕКЦИЯ XVIII.

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 1. Общие замечания.

Мы уже видели в прошлых лекциях, что решение некоторых задач математической физики приводится к решению уравнений

$$\varphi(P)=\int_D K(P, P_1)\varphi(P_1)\,dP_1+f(P), \qquad \text{(XVIII.1)}$$

где D — некоторая область изменения точки P и точки P_1. Функция двух переменных точек из этой области — $K(P, P_1)$ называется ядром, а $\varphi(P)$ является неизвестной функцией.

Заметим, что область D предполагается лежащей в n-мерном пространстве, и пусть координаты точки P в этом пространстве будут $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а точки P_1 будут $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$; тогда ядро $K(P, P_1)$ есть функция $2n$ переменных — $K(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n')$, а функции $\varphi(P)$ и $f(P)$ являются функциями n переменных: $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, причём эти переменные изменяются так, что точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $P_1(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ не выходят из области D.

В частности, если область D является одномерной и связной, тогда положение точки P определяется одной координатой x, и интегральное уравнение примет вид:

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x, x')\varphi(x')\,dx'+f(x).$$

К систематическому изучению уравнений вида (XVIII.1), называемых обычно *интегральными уравнениями Фредгольма 2-го рода*, мы сейчас и приступим.

Свободный член уравнения (XVIII.1) будем считать интегрируемым и условимся с самого начала рассматривать только интегрируемые решения φ этого уравнения.

Мы будем встречаться далее с разными уравнениями, имеющими иногда много решений. Так же, как и для всяких линейных задач, для интегральных уравнений типа Фредгольма имеет место теорема.

Теорема. Общее решение уравнения (XVIII.1) имеет вид

$$\varphi(P)=\varphi_0(P)+\varphi^*(P),$$

где $\varphi_0(P)$ есть некоторое частное решение, а $\varphi^*(P)$ представляет собою общее решение уравнения

$$\varphi(P)=\int\limits_D K(P, P_1)\varphi(P_1)\,dP_1, \tag{XVIII.2}$$

которое мы будем называть *соответствующим однородным уравнением* для уравнения (XVIII.1).

Отсюда ясно, что если соответствующее однородное уравнение не имеет других решений, кроме тривиального $\varphi^*(P)=0$, то наше уравнение имеет единственное решение.

§ 2. Метод последовательных приближений.

Прежде всего изучим несколько простейших частных случаев, которые позволят нам перейти к более общей трактовке вопроса.

Вместо уравнения (XVIII.1) мы будем рассматривать уравнение более общего вида:

$$\varphi(P)=\lambda\int\limits_D K(P, P_1)\varphi(P_1)\,dP_1+f(P), \tag{XVIII.3}$$

так называемое уравнение с параметром. Допустим, что область D изменения точки P ограничена; объём этой области будем обозначать также буквой D. Допустим, кроме того, что ядро $K(P, P_1)$ также ограничено и интегрируемо:

$$|K(P, P_1)|\leqslant M.$$

При малых λ, естественно, возникает мысль искать решение (XVIII.3) в виде степенного ряда

$$\varphi(P)=\varphi_0(P)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\varphi_k(P). \tag{XVIII.4}$$

Подставляя это выражение в (XVIII.3), получим:

$$\varphi_0(P)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\varphi_k(P)=$$
$$=\lambda\int\limits_D K(P, P_1)\left[\varphi_0(P_1)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\varphi_k(P_1)\right]dP_1+f(P).$$

откуда, совершая формально необходимые операции над степенным рядом, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0(P)=f(P),\\ &\varphi_1(P)=\int_D K(P, P_1)\varphi_0(P_1)\,dP_1,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\varphi_k(P)=\int_D K(P, P_1)\varphi_{k-1}(P_1)\,dP_1.\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{XVIII.5}$$

Рекуррентные соотношения (XVIII.5) позволяют сразу вычислить $\varphi_k(P)$. Это вычисление даёт следующую формулу:

$$\varphi_k(P)=\int_D\int_D\dots\int_D K(P, P_1)K(P_1, P_2)\dots$$
$$\dots K(P_{k-1}, P_k)f(P_k)\,dP_1\,dP_2\dots dP_k. \tag{XVIII.6}$$

В самом деле, справедливость формулы (XVIII.6) для $\varphi_1(P)$ очевидна. Если теперь

$$\varphi_{k-1}(P)=\int_D\int_D\dots\int_D K(P, P_1)K(P_1, P_2)\dots$$
$$\dots K(P_{k-2}, P_{k-1})f(P_{k-1})\,dP_1\,dP_2\dots dP_{k-1},$$

то и для $\varphi_k(P)$ формула (XVIII.6) справедлива. Полная индукция убеждает в том, что формула (XVIII.6) справедлива для всех k.

Удобно дать формуле (XVIII.6) иной вид. Для этого выделим интегрирование по P_k, положив

$$K_k(P, P_k)=\int_D\int_D\dots\int_D K(P, P_1)K(P_1, P_2)\dots$$
$$\dots K(P_{k-1}, P_k)\,dP_1\,dP_2\dots dP_{k-1}. \tag{XVIII.7}$$

Тогда

$$\varphi_k(P)=\int_D K_k(P, P')f(P')\,dP'. \tag{XVIII.8}$$

Функция $K_k(P, P')$ называется k-м повторным или итерированным ядром. Покажем, что имеет место следующая формула:

$$K_{p+q}(P, P')=\int_D K_p(P, P_1)K_q(P_1, P')\,dP_1. \tag{XVIII.9}$$

Для доказательства этой формулы достаточно подставить в правую часть (XVIII.9) вместо $K_p(P, P_1)$ и $K_q(P_1, P')$ их выражения, тогда мы получим:

$$\int\limits_D \left\{\int\limits_D \int\limits_D \ldots \int\limits_D K(P, P_1) K(P_1, P_2) \ldots K(P_{p-1}, P_p)\, dP_1 \ldots dP_{p-1}\right\} \times$$
$$\times \left\{\int\limits_D \int\limits_D \ldots \int\limits_D K(P_p, P_{p+1}) \ldots K(P_{p+q-1}, P')\, dP_{p+1} \ldots dP_{p+q-1}\right\} dP_p.$$

Отсюда сразу перестановкой порядка интегрирования получаем искомую формулу (XVIII.9).

Оценим абсолютную величину k-го повторного ядра.

Формула (XVIII.7) даёт:

$$|K_k(P, P')| \leqslant M^k \int\limits_D \int\limits_D \ldots \int\limits_D dP_1 \ldots dP_{k-1} = M^k D^{k-1}. \quad \text{(XVIII.10)}$$

Возвращаясь к искомому решению, будем иметь пока формально

$$\varphi(P) = f(P) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int\limits_D K_k(P, P') f(P')\, dP'. \quad \text{(XVIII.11)}$$

Для доказательства того, что выражение для решения (XVIII.11) справедливо, заметим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} M^k D^{k-1}$ имеет радиус сходимости по λ, равный $\frac{1}{MD}$, и в силу оценок (XVIII.10) степенной ряд

$$\Gamma(P, P', \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K_k(P, P') \quad \text{(XVIII.12)}$$

во всяком случае сходится для всех λ, удовлетворяющих неравенству:

$$|\lambda| < \frac{1}{MD}.$$

Как известно, для этих значений λ можно над степенным рядом производить операции, как над многочленом. Поэтому для $|\lambda| < \frac{1}{MD}$ мы простой проверкой убеждаемся в справедливости формулы (XVIII.11).

Запишем (XVIII.11) в виде

$$\varphi(P) = f(P) + \lambda \int\limits_D \Gamma(P, P', \lambda) f(P')\, dP'. \quad \text{(XVIII.13)}$$

Функция $\Gamma(P, P', \lambda)$ называется резольвентой интегрального уравнения (XVIII.3).

Резольвента удовлетворяет в свою очередь двум интегральным уравнениям:

$$\Gamma(P, P', \lambda) = K(P, P') + \lambda \int\limits_D K(P, P_1)\, \Gamma(P_1, P', \lambda)\, dP_1, \qquad \text{(XVIII.14)}$$

$$\Gamma(P, P', \lambda) = K(P, P') + \lambda \int\limits_D \Gamma(P, P_1, \lambda)\, K(P_1, P')\, dP_1. \qquad \text{(XVIII.15)}$$

Для проверки этих уравнений достаточно подставить в правую часть (XVIII.14) и (XVIII.15) представление $\Gamma(P, P', \lambda)$ из формулы (XVIII.12) и воспользоваться затем (XVIII.9).

Проделать это подробно мы предоставим слушателям.

Из наших предыдущих рассуждений вытекало, что формула (XVIII.13) даёт решение уравнения (XVIII.3) при $|\lambda| < \frac{1}{MD}$. Мы докажем, что эта формула даёт решение задачи для всех таких значений λ, для которых верно (XVIII.14) и что всякое решение задачи в той области, где верно (XVIII.15), должно представляться в виде (XVIII.13).

Условимся в некотором символическом обозначении. Пусть $\gamma(P)$ — произвольная интегрируемая функция точки P. Обозначим через $B\gamma(P)$ функцию

$$B\gamma(P) \equiv \gamma(P) - \lambda \int\limits_D K(P, P_1)\, \gamma(P_1)\, dP_1$$

и аналогично через $B^{-1}\gamma(P)$ функцию

$$B^{-1}\gamma(P) \equiv \gamma(P) + \lambda \int \Gamma(P, P_1, \lambda)\, \gamma(P_1)\, dP_1.$$

Вычислим функции $BB^{-1}\gamma(P)$ и $B^{-1}B\gamma(P)$.

Мы будем иметь:

$$\begin{aligned} BB^{-1}\gamma(P) &= \Big[\gamma(P) + \lambda \int\limits_D \Gamma(P, P_1, \lambda)\, \gamma(P_1)\, dP_1\Big] - \\ &\quad - \lambda \int\limits_D K(P, P_1) \Big[\gamma(P_1) + \lambda \int\limits_D \Gamma(P_1, P_2, \lambda)\, \gamma(P_2)\, dP_2\Big] dP_1 = \\ &= \gamma(P) + \lambda \Big\{ \int\limits_D [\Gamma(P, P_1, \lambda) - K(P, P_1)]\, \gamma(P_1)\, dP_1 - \\ &\quad - \lambda^2 \int\limits_D \int\limits_D K(P, P_1)\, \Gamma(P_1, P_2, \lambda)\, \gamma(P_2)\, dP_1\, dP_2 \Big\}; \end{aligned}$$

меняя названия переменных в двойном интеграле и переставляя порядок интегрирования, получим:

$$BB^{-1}\gamma(P)=\gamma(P)+\lambda\int_D \gamma(P_1)\Big[\Gamma(P, P_1, \lambda)-K(P, P_1)-$$
$$-\lambda\int_D K(P, P_2)\Gamma(P_2, P_1, \lambda)\,dP_2\Big]\,dP_1.$$

В силу (XVIII.14) будем иметь:

$$BB^{-1}\gamma(P)\equiv\gamma(P).$$

Так же точно в силу (XVIII.15):

$$B^{-1}B\gamma(P)\equiv\Big[\gamma(P)-\lambda\int_D K(P, P_1)\gamma(P_1)\,dP_1\Big]+$$
$$+\lambda\int_D \Gamma(P, P_1, \lambda)\Big[\gamma(P_1)-\lambda\int_D K(P_1, P_2)\gamma(P_2)\,dP_2\Big]\,dP_1\equiv$$
$$\equiv\gamma(P)+\lambda\Big\{\int_D\Big[\Gamma(P, P_1, \lambda)-K(P, P_1)-$$
$$-\lambda\int_D \Gamma(P, P_2, \lambda)K(P_2, P_1)\,dP_2\Big]\gamma(P_1)\,dP_1\Big\}\equiv\gamma(P),$$

т. е.

$$B^{-1}B\gamma(P)\equiv\gamma(P).$$

Отсюда следует, что уравнение (XVIII.3), которое можно записать в виде

$$B\varphi=f(P),$$

имеет решение для всех тех значений λ, для которых справедливо (XVIII.14). Это решение будет $B^{-1}f(P)$, ибо

$$BB^{-1}f(P)=f(P).$$

Это решение единственно во всей той области, где справедливо (XVIII.15). В самом деле, из того, что $\varphi(P)$ удовлетворяет уравнению $B\varphi(P)=f(P)$, следует $B^{-1}B\varphi(P)=B^{-1}f(P)$, т. е.

$$\varphi(P)=B^{-1}f(P),$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что формулы (XVIII.3) и (XVIII.13)

$$f(P)=\varphi(P)-\lambda\int_D K(P, P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1,$$

$$\varphi(P)=f(P)+\lambda\int_D \Gamma(P, P_1, \lambda)\,f(P_1)\,dP_1$$

при выполнении равенств (XVIII.14) и (XVIII.15) являются взаимными, т. е. (XVIII.13) даёт решение уравнения (XVIII.3), а (XVIII.3) даёт решение уравнения (XVIII.13), если считать $f(P)$ за неизвестную функцию. Отсюда следует, что если считать функцию $\Gamma(P, P_1, \lambda)$ за ядро, то её резольвентой будет $K(P, P_1)$.

§ 3. Уравнение Вольтерра.

В некоторых частных случаях ряд (XVIII.12) может оказаться сходящимся на всей плоскости комплексного переменного λ. Рассмотрим соответствующий пример. Пусть область D одного переменного представляет собой полупрямую $x>0$,

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\infty K(x, y)\,\varphi(y)\,dy+f(x), \tag{XVIII.16}$$

и пусть ядро $K(x, y)$ обладает свойством:

$$K(x, y)\equiv 0 \quad \text{при} \quad y>x. \tag{XVIII.17}$$

Тогда уравнение (XVIII.16) примет вид

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x K(x, y)\,\varphi(y)\,dy+f(x). \tag{XVIII.18}$$

Уравнения этого типа называются уравнениями Вольтерра.

Оценим повторное ядро для уравнения Вольтерра:

$$|K_k(x, y)|\leqslant M^k \int\int\limits_{x\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_{k-1}\leqslant y}\ldots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_{k-1}=$$

$$=M^k\int_x^y dx_{k-1}\int_x^{x_{k-1}} dx_{k-2}\ldots\int_x^{x_2} dx_1.$$

Но так как

$$\int_{x}^{x_2} dx_1 = (x_2 - x),$$

$$\int_{x}^{x_3} (x_2 - x)\, dx_2 = \frac{(x_3 - x)^2}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{x}^{y} \frac{(x_{k-1} - x)^{k-2}}{(k-2)!}\, dx_{k-1} = \frac{(y - x)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Следовательно,

$$|K_k(x, y)| \leqslant \frac{M^k (y - x)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M^k \frac{(y - x)^{k-1}}{(k-1)!}$ сходится при всех значениях параметра λ. Следовательно, ряд для резольвенты и подавно будет сходиться для всех значений λ, откуда сразу следует наше утверждение.

§ 4. Уравнения с вырожденным ядром.

Рассмотрим ещё один частный класс интегральных уравнений, теорию которого легко построить. Полученные при этом результаты окажутся справедливыми и в более общем случае.

Изучим интегральное уравнение (XVIII.3) в предположении, что его ядро имеет специальный вид:

$$K(P, P_1) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(P)\, \psi_i(P_1). \tag{XVIII.19}$$

Систему функций $\varphi_1(P)$, $\varphi_2(P)$, ..., $\varphi_N(P)$, а также $\psi_1(P)$, $\psi_2(P)$, ..., $\psi_N(P)$ мы можем считать линейно независимыми системами в области D, ибо в противном случае можно выразить одну или несколько функций через линейную комбинацию остальных, и мы придём к ядру такого же вида, но с меньшим числом слагаемых.

В дальнейшем, пока не сделано специальной оговорки, мы будем считать функции

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_N, \psi_1, \ldots, \psi_N$$

ограниченными.

Ядра вида (XVIII.19) называются вырожденными ядрами.

Уравнение (XVIII.3) с вырожденным ядром имеет вид:

$$\varphi(P)=\lambda\sum_{l=1}^{N}\varphi_l(P)\int_D\psi_l(P_1)\varphi(P_1)\,dP_1+f(P), \quad \text{(XVIII.20)}$$

и, следовательно, $\varphi(P)-f(P)$ есть линейная комбинация функций $\varphi_l(P)$, $l=1, 2, \ldots, N$ с постоянными коэффициентами. Полагая $\varphi(P)-f(P)=\lambda\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\varphi_k(P)$ и подставляя это выражение в уравнение (XVIII.20), получим:

$$\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\varphi_k(P)=\lambda\sum_{l=1}^{N}\varphi_l(P)\int_D\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\varphi_k(P_1)\psi_l(P_1)\,dP_1+$$
$$+\sum_{l=1}^{N}\varphi_l(P)\int_D\psi_l(P_1)f(P_1)\,dP_1.$$

Так как функции $\varphi_l(P)$ линейно независимы, то, приравнивая коэффициенты при одинаковых $\varphi_l(P)$, получим систему уравнений:

$$\alpha_l=\lambda\sum_{k=1}^{N}\alpha_k m_{kl}+f_l; \qquad l=1, 2, \ldots, N, \quad \text{(XVIII.21)}$$

где

$$\left.\begin{aligned} m_{kl}&=\int_D\varphi_k(P_1)\psi_l(P_1)\,dP_1,\\ f_l&=\int_D f(P_1)\psi_l(P_1)\,dP_1.\end{aligned}\right\} \quad \text{(XVIII.22)}$$

Система (XVIII.21) полностью эквивалентна интегральному уравнению (XVIII.20). Обозначим матрицу системы (XVIII.21) через $M(\lambda)$:

$$M(\lambda)=\left\|\begin{matrix} 1-m_{11}\lambda, & -m_{12}\lambda & \ldots & -m_{1N}\lambda\\ -m_{21}\lambda, & 1-m_{22}\lambda & \ldots & -m_{2N}\lambda\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -m_{N1}\lambda, & -m_{N2}\lambda & \ldots & 1-m_{NN}\lambda\end{matrix}\right\|. \quad \text{(XVIII.23)}$$

Разрешимость нашей системы зависит от определителя $\Delta(\lambda)=|M|$ этой матрицы.

Очевидно, при этом могут представиться два случая:

I. $\Delta(\lambda)\neq 0$,

II. $\Delta(\lambda)=0$.

В случае I имеем следующую теорему:

Теорема 1. Система (XVIII.21) при значениях λ, для которых $\Delta(\lambda) \neq 0$, однозначно разрешима при любых f_l, и уравнение (XVIII.3) разрешимо при любой функции f.

В частности, уравнение

$$\varphi(P) = \lambda \int_D K(P, P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1, \qquad \text{(XVIII.24)}$$

которое мы назвали соответствующим однородным уравнением для (XVIII.3), имеет при этом единственное тривиальное решение. Теорема 1 не требует доказательства.

В случае II для значений λ, для которых $\Delta(\lambda) = 0$, система (XVIII.21) разрешима не при всяких f_l, а следовательно, уравнение (XVIII.3) — не при всяких f.

При этом однородная система

$$\alpha_l - \lambda \sum_{k=1}^{N} m_{kl}\alpha_k = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, N, \qquad \text{(XVIII.25)}$$

имеет $N - q$ линейно независимых решений, где q — ранг матрицы $M(\lambda)$.

Пусть эти решения будут

$$\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \ldots, \alpha_N^{(s)}; \qquad s = 1, 2, \ldots, N - q.$$

Уравнение (XVIII.24) будет, очевидно, также иметь ровно $N - q$ линейно независимых решений.

В силу условия $\Delta(\lambda) = 0$ левые части (XVIII.21) зависимы и, следовательно, можно составить линейные комбинации этих левых частей, обращающиеся в нуль тождественно. В самом деле, умножая уравнения (XVIII.21) соответственно на β_l и складывая, получим:

$$\sum_{l=1}^{N} \alpha_l\beta_l - \lambda \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} m_{kl}\alpha_k\beta_l = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\beta_k - \lambda \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} m_{kl}\alpha_k\beta_l =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Big[\beta_k - \lambda \sum_{l=1}^{N} m_{kl}\beta_l\Big] = \sum_{l=1}^{N} f_l\beta_l.$$

Можно подобрать β_l так, что

$$\beta_k - \lambda \sum_{l=1}^{N} m_{kl}\beta_l = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, N. \qquad \text{(XVIII.26)}$$

Это следует из того, что определитель системы (XVIII.25) равен $\Delta(\lambda) = 0$. Как доказывается в курсах алгебры, число линейно независимых решений (XVIII.26) равно опять $N-q$. Пусть эти решения будут: $\mathfrak{z}_1^{(s)}, \mathfrak{z}_2^{(s)}, \ldots, \mathfrak{z}_N^{(s)}$; $s=1, 2, \ldots, (N-q)$.

Для резрешимости (XVIII.21) необходимо выполнение равенства:

$$\sum_{l=1}^{N} f_l \mathfrak{z}_l^{(s)} = 0; \quad s = 1, 2, \ldots, (N-q). \qquad \text{(XVIII.27)}$$

Докажем, что эти условия являются также и достаточными.

Каждое решение (XVIII.26) даёт связь между левыми частями уравнений (XVIII.21). Существование $N-q$ решений $\mathfrak{z}_l^{(s)}$; $s=1, 2, \ldots, N-q$ говорит о том, что среди этих левых частей ровно q независимых. Не уменьшая общности, будем считать, что независимыми являются первые q уравнений (XVIII.21).

Тогда $\mathfrak{z}_l^{(s)}$ могут быть выбраны в виде следующей таблицы:

$$\left.\begin{array}{llllll}
\mathfrak{z}_1^{(1)}, & \mathfrak{z}_2^{(1)}, & \ldots, \mathfrak{z}_q^{(1)}, & -1, & 0, \ldots, & 0, \\
\mathfrak{z}_1^{(2)}, & \mathfrak{z}_2^{(2)}, & \ldots, \mathfrak{z}_q^{(2)}, & 0, & -1, \ldots, & 0, \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
\mathfrak{z}_1^{(N-q)}, & \mathfrak{z}_2^{(N-q)}, & \ldots, \mathfrak{z}_q^{(N-q)}, & 0, & 0, \ldots, & -1.
\end{array}\right\} \qquad \text{(XVIII.28)}$$

Каждая строка этой таблицы показывает, как выражается левая часть уравнения с номером $q+t$ через левые части первых q уравнений.

Если и правые части этих уравнений также выражаются через правые части первых q уравнений с теми же коэффициентами, то, очевидно, уравнения с номерами $q+1, \ldots, N$ будут следствиями остальных. Значит, условия (XVIII.27) достаточны для разрешимости (XVIII.21), что и требовалось доказать.

Подобно тому как система (XVIII.21) соответствовала уравнению (XVIII.3), а система (XVIII.25) уравнению (XVIII.24), можно установить соответствие между системой (XVIII.26) уравнением:

$$\psi(P_1) = \lambda \int_V K(P, P_1)\, \psi(P)\, dP, \qquad \text{(XVIII.29)}$$

которое мы будем называть однородным уравнением, союзным с уравнением (XVIII.24). Подставляя вместо $K(P, P_1)$ его выражение и повторяя дословно предыдущие рассуждения, мы убеждаемся, что решение уравнения (XVIII.29) должно иметь вид:

$$\psi^{(s)}(P_1) = \sum_{l=1}^{N} \mathfrak{z}_l^{(s)} \psi_l(P_1), \qquad \text{(XVIII.30)}$$

где $\beta_i^{(s)}$ — числа, удовлетворяющие (XVIII.26). Отсюда получаем теорему.

Теорема 2. Число линейно независимых решений однородного уравнения (XVIII.24) и союзного с ним (XVIII.29) совпадает и равняется $r=N-q$, где q — ранг матрицы $M(\lambda)$, а N — число слагаемых в нашем вырожденном ядре.

Подчеркнём, что однородные уравнения (XVIII.24) и (XVIII.29) имеют нетривиальные решения только для тех значений λ, для которых детерминант матрицы $M(\lambda)$ обращается в нуль. Эти значения λ называются *собственными значениями или характеристическими числами* нашего уравнения, а число линейно независимых решений $r=N-q$, соответствующее данному характеристическому числу, называется его рангом.

Подставим в уравнения (XVIII.27) вместо f_l их выражения. Мы будем иметь:

$$\int_D f(P)\sum_{l=1}^{N}\beta_l^{(s)}\psi_l(P)\,dP=0, \qquad \text{(XVIII.31)}$$

или

$$\int_D f(P)\,\psi^{(s)}(P)\,dP=0. \qquad \text{(XVIII.32)}$$

Очевидно, что из (XVIII.32) следует (XVIII.27).

Будем называть две функции ортогональными, если интеграл от их произведения по области D равен нулю. Получим следующую теорему.

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (XVIII.3) в случае II, т. е. при $\Delta(\lambda)=0$, является ортогональность его свободного члена f ко всем решениям союзного однородного уравнения.

Очевидно, что при этом общее решение уравнения (XVIII.2) имеет вид

$$\varphi(P)=\varphi^{(0)}(P)+\sum_{s=1}^{N-q}C_s\varphi^{(s)}(P), \qquad \text{(XVIII.33)}$$

где $\varphi^{(0)}(P)$ — некоторое частное решение, а $\varphi^{(s)}(P)$; $s=1, 2, \ldots, (N-q)$ суть частные решения однородного уравнения (XVIII.24). Теоремы 1, 2 и 3 носят название первой, второй и третьей *теорем Фредгольма*.

Замечание. Первая теорема Фредгольма по существу следует из второй и третьей. В самом деле, если число линейно независимых решений у союзного однородного уравнения и у соответствующего однородного уравнения равно нулю (решений у этих уравнений всегда одинаковое число), то условия ортогональности пропадают, и неоднородное уравнение будет однозначно разрешимо.

До сих пор мы рассматривали уравнения с вырожденным ядром, предполагая, что функции $\varphi_l(P)$ и $\psi_l(P)$ не содержат параметра λ.

Пусть теперь функции $\varphi_l(P)$ и $\psi_l(P)$ зависят ещё от комплексного параметра λ и аналитичны в некоторой области Ω изменения этого переменного.

Тогда определитель $\Delta(\lambda)$ будет функцией от λ, также аналитической в этой области. Допустим, что он не обращается в нуль тождественно. *Тогда внутри Ω второй случай (т. е. $\Delta(\lambda)=0$) может иметь место только в изолированных точках*, ибо $\Delta(\lambda)$, как функция аналитическая, может иметь только изолированные нули.

Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

4-я теорема Фредгольма. Если в уравнении с вырожденным ядром функции, из которых составлено это ядро, суть аналитические функции параметра λ в некоторой области Ω в плоскости λ и если хотя бы для одного значения λ уравнение однозначно разрешимо при любой правой части, то второй случай (т. е. $\Delta(\lambda)=0$) может иметь место только для изолированных точек области Ω.

§ 5. Ядро специального вида. Теоремы Фредгольма для общего случая.

Разобрав решение интегральных уравнений в круге $|\lambda|<\frac{M}{D}$, а также уравнений с вырожденным ядром, переходим к анализу более общего случая.

Пусть ядро уравнения (XVIII.3) имеет вид

$$K(P, P_1)=\sum_{l=1}^{N}\chi_l(P)\,\xi_l(P_1)+K_1(P, P_1), \tag{XVIII.34}$$

где

$$|K_1(P, P_1)|<M. \tag{XVIII.35}$$

Уравнение (XVIII.3) примет при этом вид

$$\varphi(P)-\lambda\int\limits_D K_1(P, P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1=$$

$$=\lambda\sum_{l=1}^{N}\chi_l(P)\int\limits_D \xi_l(P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1+f(P). \tag{XVIII.36}$$

Будем рассматривать область $|\lambda| < \frac{1}{DM}$.

Вводим опять символическое обозначение:

$$\varphi(P) - \lambda \int\limits_D K_1(P, P_1)\varphi(P_1)\,dP_1 \equiv B_1\varphi(P),$$

$$\chi(P) + \lambda \int\limits_D \Gamma_1(P, P_1, \lambda)\chi(P_1)\,dP_1 \equiv B_1^{-1}\chi(P),$$

где Γ_1 — резольвента ядра K_1.

Введём ещё соответствующее обозначение для союзного уравнения:

$$\psi(P_1) - \lambda \int\limits_D K_1(P, P_1)\psi(P)\,dP \equiv B_1^*\psi(P_1).$$

Читатель легко проверит, что если положить, кроме того,

$$B_1^{*-1}\xi(P_1) \equiv \xi(P_1) + \lambda \int\limits_D \Gamma_1(P, P_1, \lambda)\xi(P)\,dP,$$

то на основании (XVIII.15)

$$B_1^* B_1^{*-1}\xi(P_1) \equiv \xi(P_1)$$

и в силу (XVIII.14)

$$B_1^{*-1} B_1^*\psi(P_1) \equiv \psi(P_1).$$

Проверим ещё две формулы, которыми мы будем пользоваться далее

$$\int\limits_D B_1\varphi(P)\psi(P)\,dP = \int\limits_D \varphi(P) B_1^*\psi(P)\,dP, \qquad \text{(XVIII.37)}$$

$$\int\limits_D B_1^{-1}\chi(P)\xi(P)\,dP = \int\limits_D \chi(P) B_1^{*-1}\xi(P)\,dP. \qquad \text{(XVIII.38)}$$

В самом деле,

$$\int\limits_D B_1\varphi(P)\psi(P)\,dP = \int\limits_D \Big[\varphi(P) - \lambda \int\limits_D K_1(P, P_1)\varphi(P_1)\,dP_1\Big]\psi(P)\,dP =$$

$$= \int\limits_D \varphi(P)\psi(P)\,dP - \lambda \iint\limits_D \varphi(P_1) K_1(P, P_1)\psi(P)\,dP_1\,dP =$$

$$= \int\limits_D \varphi(P_1)\Big[\psi(P_1) - \lambda \int\limits_D K_1(P, P_1)\psi(P)\,dP\Big]\,dP_1 =$$

$$= \int\limits_D \varphi(P) B_1^*\psi(P)\,dP. \qquad \text{(XVIII.39)}$$

Также доказывается и формула (XVIII.38).

Уравнение (XVIII.36) запишется при этом в виде:

$$B_1\varphi=\lambda\sum\chi_i(P)\int\limits_F\xi_i(P_1)\,\varphi(P_1)\,dP_1+f(P). \quad \text{(XVIII.40)}$$

Положим $B_1\varphi(P)=\chi(P)$, откуда $\varphi(P)=B_1^{-1}\chi(P)$. Подставляя в уравнение (XVIII.36) это выражение и пользуясь равенством (XVIII.38), получим:

$$\chi(P)=\lambda\sum\chi_i(P)\int\limits_D\xi_i(P_1)\,B_1^{-1}\chi(P_1)\,dP_1+f(P)=$$
$$=\lambda\sum\chi_i(P)\int\limits_D B_1^{*-1}\xi_i(P_1)\,\chi(P_1)\,dP_1+f(P). \quad \text{(XVIII.41)}$$

Таким образом, уравнение (XVIII.36) перешло в уравнение с вырожденным ядром для новой неизвестной функции $\chi(P)$. Обратно, если $\chi(P)$ есть решение уравнения (XVIII.41), то функция $\varphi(P)=B_1^{-1}\chi(P)$ будет решением уравнения (XVIII.39). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в (XVIII.41) вместо $\chi(P)$ его выражение $\chi(P)=B_1\varphi(P)$.

Составим союзное однородное уравнение для уравнения (XVIII.41)

$$\psi(P_1)-\lambda\sum B_1^{*-1}\xi_i(P_1)\int\limits_D\chi_i(P)\,\psi(P)\,dP=0. \quad \text{(XVIII.42)}$$

Обозначим левую часть этого уравнения через $\omega(P_1)$. Функция $\omega(P_1)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$B_1^*\omega(P_1)=0. \quad \text{(XVIII.43)}$$

Это значит, что уравнение (XVIII.42) имеет все те же решения, что и уравнение (XVIII.43). Но

$$B_1^*\omega_1(P_1)=B_1^*\psi(P_1)-\lambda\left(\sum\int\limits_D\chi_i(P)\,\psi(P)\,dP\right)B_1^*B_1^{*-1}\xi_i(P_1)=$$
$$=B_1^*\psi(P_1)-\lambda\sum\xi_i(P_1)\int\limits_D\chi_i(P)\,\psi(P)\,dP,$$

и, следовательно, уравнение (XVIII.43) есть союзное однородное уравнение для (XVIII.36).

Пользуясь развитой нами теорией, мы можем установить все теоремы Фредгольма для исходного уравнения.

2-я теорема Фредгольма. Число q линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения для уравнения (XVIII.36) и союзного с ним (XVIII.43) совпадает.

Достаточно установить совпадение числа линейно независимых решений у однородного уравнения, соответствующего уравнениям (XVIII.41) и (XVIII.42), эквивалентных рассматриваемым. Но число таких решений однородного уравнения, соответствующего (XVIII.41) и (XVIII.42), одинаково в силу 2-й теоремы Фредгольма, доказанной нами для уравнения с вырожденным ядром. Теорема доказана.

3-я теорема Фредгольма. Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (XVIII.36) состоит в том, чтобы свободный член его был ортогонален ко всем решениям союзного однородного уравнения (XVIII.43):

$$\int_D f(P)\psi_i(P)\,dP = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, q. \qquad \text{(XVIII.44)}$$

Заметим, что решения $\psi_i(P)$ уравнения (XVIII.43) суть решения уравнения (XVIII.42), а свободный член (XVIII.36) и (XVIII.41) один и тот же.

Поэтому условия (XVIII.44) выражают собою, как следует из 3-й теоремы Фредгольма, установленной для уравнений с вырожденным ядром, необходимые и достаточные условия разрешимости (XVIII.41).

Благодаря тому, что уравнения (XVIII.41) и (XVIII.36) разрешимы одновременно, условия (XVIII.44) будут необходимыми и достаточными условиями разрешимости (XVIII.36). Теорема доказана.

1-я теорема Фредгольма. Если уравнение (XVIII.36) разрешимо при любой функции $f(P)$ в правой части, то решение его единственно, и наоборот, если решение (XVIII.36) единственно, то уравнение разрешимо при любой функции $f(P)$.

Эта теорема, как отмечено выше, есть следствие 2-й и 3-й теорем Фредгольма.

В нашем случае 4-я теорема Фредгольма имеет особо простую формулировку.

4-я теорема Фредгольма. Характеристические значения λ не имеют предельных точек внутри круга $|\lambda| < \frac{1}{MD}$.

Доказательство вытекает из того, что $\lambda = 0$ не будет характеристическим числом для (XVIII.41), так как иных решений, кроме $\chi(P) = f(P)$, при этом значении λ не будет.

В силу 4-й теоремы Фредгольма, доказанной нами для вырожденных ядер, характеристические числа уравнения (XVIII.41), а значит, и уравнения (XVIII.36) не могут иметь предельных точек внутри круга $|\lambda| < \frac{1}{MD}$, где регулярны функции, из которых составлено ядро. Теорема доказана.

Мы доказали четыре теоремы Фредгольма для тех интегральных уравнений, ядро которых представимо в виде (XVIII.34). Может случиться, что, увеличивая N, можно сделать M — верхнюю грань $|K_1(P, P_1)|$, как угодно малой, т. е. мы сможем суммами вида $\sum\limits_{l=1}^{N} \gamma_l(P)\,\xi_l(P_1)$ приблизить с любой степенью точности наше ядро $K(P, P_1)$. Для ядер такого типа все теоремы Фредгольма справедливы в круге сколь угодно большого радиуса, и единственной предельной точкой для характеристических значений λ может служить ∞.

Докажем, что это обстоятельство будет иметь место, например, если выполнены следующие условия, очень часто встречающиеся в приложениях:

1) Область D представляет собой некоторое n-мерное многообразие в некотором k-мерном кубе $\Omega_1: 0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant x_k \leqslant 1$ (или может быть взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображена на такое многообразие).

2) Ядро $K(P, P_1)$ есть функция, непрерывная в $2k$-мерном многообразии, и может быть непрерывно продолжена на $2k$-мерный куб Ω_2:

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$0 \leqslant y_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

где через x_i обозначены координаты точки P в кубе Ω_1, а через y_i — координаты точки Q в том же кубе.

Очевидно, что оба эти условия будут выполнены, например, если область D есть поверхность в трёхмерном пространстве и функция $K(P, P_1)$ непрерывна при изменении P и P_1 вдоль этой поверхности.

Переходим к доказательству нашего утверждения.

Считая функцию $K(P, P_1)$ заданной в $2k$-мерном кубе Ω_2, мы можем, в силу теоремы Вейерштрасса, изобразить её приближённо с помощью многочленов от $2k$ переменных с любой наперёд заданной точностью. Но многочлен от x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и y_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, всегда может быть представлен в виде суммы произведений функций, зависящих только от $x_1, \ldots, x_k$, на функции, зависящие только от $y_1, \ldots, y_k$, что и требовалось доказать.

Из самого построения решения уравнения Фредгольма в нашем случае очевидно, что это решение будет аналитической функцией параметра λ на всей плоскости, за исключением особых точек, являющихся характеристическими значениями λ и лежащих изолированно.

Применяя это заключение к уравнению (XVIII.14), мы убеждаемся в том, что резольвента $\Gamma(P, P', \lambda)$, которая представляет собой единственное решение этого уравнения, при достаточно малых λ есть аналитическая функция параметра λ всюду, кроме этих изолированных точек. В таком случае обе части уравнений (XVIII.14) и (XVIII.15) суть аналитические функции λ, мероморфные во всей плоскости λ, а значит, по принципу аналитического продолжения, эти уравнения справедливы на всей плоскости, кроме указанного множества изолированных точек.

§ 6. Теорема Вейерштрасса.

Для того чтобы доказать справедливость теории Фредгольма для непрерывных ядер, мы воспользовались тем, что произвольная непрерывная функция m переменных в кубе $\Omega: -1 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$ может быть со сколь угодно большой точностью приближена многочленом от этих переменных.

Ввиду очень большой важности этой теоремы, носящей название *теоремы Вейерштрасса*, приведём её доказательство.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ задана в кубе $\Omega: 0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и непрерывна в нём.

Распространим её непрерывно на куб $\Omega: -2 \leqslant x_i \leqslant 2$, $i = 1, 2, \ldots, m$, что, очевидно, возможно (см. лекцию VI).

Построим многочлен

$$P_l(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = \frac{\underset{-2 \leqslant x_i \leqslant 2}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_m) \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{(x_j - x_j^0)^2}{16}\right)^l dx_1 \ldots dx_m}{\underset{-2 \leqslant x_i \leqslant 2}{\int \cdots \int} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{x_j^2}{16}\right)^l dx_1 \ldots dx_m}. \tag{XVIII.45}$$

$P_l(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ представляет собой многочлен от $x_1^0, \ldots, x_m^0$ степени $2ml$. Докажем, что этот многочлен при достаточно большом l сколь угодно мало отличается от $f(x_1^0, \ldots, x_m^0)$. Составим число

$$I_l(h) = \frac{\underset{-4 \leqslant x_i \leqslant +4}{\int \cdots \int} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{x_j^2}{16}\right) dx_1 \ldots dx_m - \underset{-h \leqslant x_i \leqslant +h}{\int \cdots \int} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{x_j^2}{16}\right)^l dx_1 \ldots dx_m}{\underset{-2 \leqslant x_i \leqslant +2}{\int \cdots \int} \sum_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{x_j^2}{16}\right)^l dx_1 \ldots dx_m}. \tag{XVIII.46}$$

Докажем, что при любом $h < 4$ можно взять l столь большим, что

$$I_l(h) < \delta, \tag{XVIII.47}$$

где δ — любое положительное число. Оценим сначала числитель $I_l(h)$. Он представляет собой интеграл от функции

$$\prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{x_j^2}{16}\right)^l$$

по области $-4 \leqslant x_i \leqslant +4$, $i = 1, \ldots, m$, из которой удалены точки $-h \leqslant x_i \leqslant h$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Но в оставшейся области хотя бы один из множителей, входящих в состав произведения, не превосходит $\left(1-\frac{h^2}{16}\right)^l$, и, следовательно,

$$\int\limits_{-4\leqslant x_i\leqslant +4}\cdots\int \prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{x_j^2}{16}\right)^l dx_1 \ldots dx_m -$$

$$- \int\limits_{-h\leqslant x_i\leqslant +h}\cdots\int \prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{x_j^2}{16}\right)^l dx_1 \ldots dx_m < 8^m\left(1-\frac{h^2}{16}\right)^l.$$

С другой стороны, для знаменателя $I_l(h)$ получим:

$$\int\limits_{-2\leqslant x_i\leqslant +2}\cdots\int \prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{x_j}{16}\right)^l dx_1 \ldots dx_m = \left[\int\limits_{-2}^{+2}\left(1-\frac{x^2}{16}\right)^l dx\right]^m.$$

Далее, полагая $1-\frac{x^2}{16} = y$, получим:

$$\int\limits_{-2}^{+2}\left(1-\frac{x^2}{16}\right)^l dx = 2\int\limits_{0}^{2}\left(1-\frac{x^2}{16}\right)^l dx =$$

$$= -2\int\limits_{\frac{3}{4}}^{1} y^l\, 4d\sqrt{1-y} = 4\int\limits_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{y^l\,dy}{\sqrt{1-y}} \geqslant \int\limits_{\frac{3}{4}}^{1} 8y^l\,dy =$$

$$= \frac{8}{l+1}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{l+1}\right].$$

Сопоставляя эти формулы, будем иметь:

$$I_l(h) < \frac{(l+1)^m\left(1-\frac{h^2}{16}\right)^l}{\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{l+1}\right]^m}, \qquad \text{(XVIII.48)}$$

откуда и следует, что $I_l(h)$ сколь угодно мало в силу того, что показательная функция $\left(1-\frac{h^2}{16}\right)^l$ стремится к нулю быстрее, чем $(l+1)^m$ идёт к бесконечности.

Из (XVIII.48) следует, что при достаточно большом l

$$K_l(h) = \frac{\underset{-h\leqslant x_j\leqslant h}{\int\cdots\int}\prod\limits_{j=1}^{m}\left(1-\frac{x_j^2}{16}\right)^l dx_1\ldots dx_m}{\underset{-2\leqslant x_j\leqslant 2}{\int\cdots\int}\prod\limits_{j=1}^{m}\left(1-\frac{x_j^2}{16}\right)^l dx_1\ldots dx_m} > 1-\varepsilon. \qquad \text{(XVIII.49)}$$

Эта формула вытекает из того, что

$$K_l(h) + I_l(h) > 1.$$

Представив функцию P_l в виде

$$P_l = P_l^{(1)} + P_l^{(2)},$$

где

$$P_l^{(1)} = \frac{\underset{x_j^0-h\leqslant x_j\leqslant x_j^0+h}{\int\cdots\int} f(x_1,\ldots,x_n)\prod\limits_{j=1}^{m}\left(1-\frac{(x_j-x_j^0)^2}{16}\right)dx_1\ldots dx_m}{\underset{-2\leqslant x_j\leqslant 2}{\int\cdots\int}\prod\limits_{j=1}^{m}\left(1-\frac{x_j^2}{16}\right)dx_1\ldots dx_m},$$

имеем:

$$P_l^{(2)} \leqslant \max|f(x_1,\ldots,x_m)|\,I_l(h),$$

$$P_l^{(1)} - f(x_1^0,\ldots,x_m^0)\,K_l(h) =$$

$$= \frac{\underset{-h\leqslant x_j-x_j^0\leqslant h}{\int\cdots\int}[f(x_1,\ldots,x_m)-f(x_1^0,\ldots,x_m^0)]\prod\limits_{j=1}^{m}\left[1-\frac{(x_j-x_j^0)^2}{16}\right]dx_1\ldots dx_n}{\underset{-2\leqslant x_j\leqslant 2}{\int\cdots\int}\prod\limits_{j=1}^{m}\left(1-\frac{x_j^2}{16}\right)dx_1\ldots dx_n}.$$

откуда

$$|P_l^{(1)} - K_l(h) f(x_1^0, \ldots, x_m^0)| \leqslant \max_{|x_i - x_i^0| \leqslant h} |f(x_1, \ldots, x_m) -$$

$$- f(x_1^0, \ldots, x_m^0)| K_l(h) \leqslant \max_{|x_i - x_i^0| < h} |f(x_1, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)|.$$

Сопоставляя эти оценки, имеем:

$$|P_l - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)| =$$

$$= |[P_l^{(1)} - K_l(h) f(x_1^0, \ldots, x_m^0)] - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)(1 - K_l(h)) + P_l^{(2)}| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|x_i - x_i^0| < h} |f(x_1, \ldots, x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)| +$$

$$+ \max |f| [(1 - K_l(h)) + I_l(h)].$$

Если выбрать сначала h столь малым, чтобы иметь

$$\max_{|x_i - x_i^0| < h} |f(x_1, \ldots, x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем l столь большим, чтобы было

$$1 - K_l(h) + I_l(h) < \frac{\varepsilon}{2 \max |f|},$$

то мы получим:

$$|P_l - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

ЛЕКЦИЯ XIX.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМ ФРЕДГОЛЬМА НА УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЯДРОМ.

§ 1. Основные леммы.

В прошлой лекции нами была рассмотрена теория Фредгольма для уравнения с ограниченными ядрами. Как мы видели выше, уже простейшие задачи теории уравнения Лапласа приводят к ядрам неограниченным.

Можно доказать, что на эти уравнения при известных специальных предположениях можно распространить всю теорию Фредгольма. Этот вопрос и составляет содержание настоящей лекции.

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\varphi(P) = f(P) + \lambda \int_D K(P, Q)\, \varphi(Q)\, dQ, \tag{XIX.1}$$

где P и Q обозначают две переменные точки, меняющиеся в ограниченной области D пространства n переменных.

На характер связности области D, как и раньше, не накладываем никаких ограничений. Обозначим через r расстояние между точками P и Q.

Допустим, что при $r \leqslant \delta$ ядро $K(P, Q)$ удовлетворяет неравенству

$$|K(P, Q)| < \frac{A}{r^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n, \tag{XIX.2}$$

и непрерывно везде при $P \neq Q$.

Пусть координаты точки P будут $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а координаты точки $Q - (y_1, \ldots, y_n)$.

Тогда

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Ядра, удовлетворяющие условию (XIX.2), мы будем называть *регуляризуемыми*.

Если бы мы решали уравнение (XIX.1) методом последовательных приближений, то мы, естественно, пришли бы к ряду

$$\varphi(P) = f(P) + \lambda \int\limits_D K(P, Q) f(Q)\, dQ + \lambda^2 \int\limits_D K_2(P, Q) f(Q)\, dQ + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^m \int\limits_D K_m(P, Q) f(Q)\, dQ + \ldots, \qquad \text{(XIX.3)}$$

где каждое ядро $K_m(P, Q)$ представляет собою так называемое повторное ядро, выражаемое формулой

$$K_m(P, Q) = \int\limits_D \int\limits_D \ldots \int\limits_D K(P, P_1) K(P_1, P_2) \ldots$$
$$\ldots K(P_{m-1}, Q)\, dP_1 \ldots dP_{m-1}. \qquad \text{(XIX.4)}$$

Ряд (XIX.3) сходился для достаточно малых λ.

Формулы (XIX.3) и (XIX.4) строго установлены нами для ограниченных ядер так же, как и формула

$$K_{p+q}(P, Q) = \int\limits_D K_p(P, P_1) K_q(P_1, Q)\, dP_1. \qquad \text{(XIX.5)}$$

При доказательстве всех этих формул мы пользовались возможностью изменять порядок интегрирования в интеграле типа (XIX.4). Та особенность, которая имеется в регуляризуемом ядре, не сказывается ничем на этой возможности, и поэтому все эти формулы останутся справедливыми и в нашем случае. Действительно, пользуясь теоремой Лебега-Фубини, достаточно лишь установить абсолютную интегрируемость произведения $K(P, P_1) K(P_1, P_2) \ldots K(P_{m-1}, Q)$ в многомерном пространстве из координат точек $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$.

Наконец, для того чтобы убедиться в абсолютной сходимости кратного интеграла, достаточно рассмотреть повторный. Докажем общую лемму.

Лемма 1. Если

$$|K_1(P, Q)| \leqslant \frac{A_1}{r^{\alpha_1}}, \quad \alpha_1 < n, \qquad \text{(XIX.6)}$$

$$|K_2(P, Q)| \leqslant \frac{A_2}{r^{\alpha_2}}, \quad \alpha_2 < n, \qquad \text{(XIX.7)}$$

где A_1 и A_2 — постоянные, а r — расстояние между точками P и Q, то интеграл

$$K_3(P, Q) = \int\limits_D K_1(P, P_1) K_2(P_1, Q)\, dP_1$$

при $\alpha_1 + \alpha_2 > n$ сходится абсолютно и удовлетворяет неравенству

$$|K_3(P, Q)| < \frac{A_3}{r^{\alpha_1 + \alpha_2 - n}}, \tag{XIX.8}$$

где A_3 — некоторая постоянная.

При $\alpha_1 + \alpha_2 < n$ этот интеграл ограничен.

Переходим к доказательству.

Имеем

$$|K_3(P, Q)| < \int\limits_D |K_1(P, P_1) K_2(P_1, Q)|\, dP_1 <$$

$$< \int\cdots\int\limits_{r_1 \le d} \frac{A_1 A_2}{\left[\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{(1)})^2}\right]^{\alpha_1} \left[\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^{(1)} - y_i)^2}\right]^{\alpha_2}}\, dx_1^{(1)}\, dx_2^{(1)} \ldots dx_n^{(1)}, \tag{XIX.9}$$

где $r_1 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{(1)})^2}$, а d — диаметр области D.

Допустим, что координатные оси выбраны таким образом, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$; $y_1 = \rho$, $y_2 = y_3 = \ldots = y_n = 0$, где ρ — расстояние между точками P и Q. В силу полной симметрии оценок (XIX.6) и (XIX.7) очевидно, что правая часть (XIX.9) зависит только от ρ, т. е. от расстояния между точками P и Q.

Положим

$$x_i^{(1)} = \rho \xi_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

тогда мы получим:

$$|K_3(P, Q)| < \int\cdots\int\limits_{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \frac{d^2}{\rho^2}} \frac{A_1 A_2 \rho^{n - \alpha_1 - \alpha_2}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n}{\left[\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2}\right]^{\alpha_1} \left[\sqrt{(\xi_1 - 1)^2 + \sum\limits_{i=2}^{n} \xi_i^2}\right]^{\alpha_2}}.$$

Разбивая последний интеграл на два слагаемых и замечая, что при $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2} > 2$ справедливо неравенство [см. (VII.3)]

$$\sqrt{(\xi_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^{n} \xi_i^2} > \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2},$$

получим:

$$K_2(P,Q) \leqslant \frac{A_1 A_2}{\rho^{\alpha_1+\alpha_2-n}} \int\limits_{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant 4} \cdots \int \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n}{\left[\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2}\right]^{\alpha_1} \left[\sqrt{(\xi_1-1)^2+\sum\limits_{i=2}^{n} \xi_i^2}\right]^{\alpha_2}} +$$

$$+ \frac{2^{\alpha_2} A_1 A_2}{\rho^{\alpha_1+\alpha_2-n}} \int\limits_{4 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant \frac{d^2}{\rho^2}} \cdots \int \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n}{\left[\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2}\right]^{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Интеграл в первом слагаемом сходится и даёт некоторую постоянную.

Во втором слагаемом интеграл также ограничен при $\alpha_1+\alpha_2>n$. В самом деле.

$$\int\limits_{4 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 < \infty} \cdots \int \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n}{\left[\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2}\right]^{\alpha_1+\alpha_2}} = \sum_{k=1}^{\infty} F(2^k),$$

где

$$F(x) = \int\limits_{x^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \leqslant 4x^2} \cdots \int \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n}{\left[\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2}\right]^{\alpha_1+\alpha_2}} =$$

$$= x^{n-\alpha_1-\alpha_2} \int\limits_{1 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \eta^2 \leqslant 4} \frac{d\eta_1\, d\eta_2 \ldots d\eta_n}{\left[\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i^2}\right]^{\alpha_1+\alpha_2}} = Cx^{n-\alpha_1-\alpha_2}, \quad \text{(XIX.10)}$$

где $\eta_i = x\xi_i$, $i=1, \ldots, n$, а C — постоянная.

Но из (XIX.10) следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(2^k) = C[2^{n-\alpha_1-\alpha_2} + 2^{2(n-\alpha_1-\alpha_2)} + 2^{3(n-\alpha_1-\alpha_2)} + \ldots] = C_1,$$

где C_1 — постоянная.

Из этой оценки и вытекает оценка (XIX.8). В случае же

$$\alpha_1+\alpha_2<n$$

мы можем сразу заключить, что ядро $K_2(P,Q)$ будет непрерывной функцией (см. VII, пример 2).

Из этой леммы следует, очевидно, что интеграл (XIX.4), который, между прочим, представим в виде

$$\int\limits_D K(P, P_1)\Big[\int\limits_D K(P_1, P_2)\ldots$$

$$\ldots\Big(\int\limits_D K(P_{m-2}, P_{m-1})\,K(P_{m-1}, Q)\,dP_{m-1}\Big)\ldots\Big]\,dP_1,$$

абсолютно сходится и его можно интегрировать в любом порядке. Мы получим для него оценку:

$$|K_m(P, Q)| < \frac{A_m}{r^{m\alpha-(m-1)n}}; \quad m\alpha-(m-1)\,n > 0,$$

$$|K_m(P, Q)| < C; \quad m\alpha-(m-1)\,n < 0.$$

Таким образом, повторные ядра, начиная с некоторого определённого m, будут ограниченными и непрерывными.

Нетрудно убедиться, что наши рассуждения сохраняют силу и в том случае, если область D есть некоторое многообразие в k-мерном пространстве, лишь бы окрестность каждой точки этого многообразия могла быть отображена с непрерывными производными первого порядка на некоторую ограниченную область n-мерного пространства.

Исследование характера непрерывности и оценка повторных ядер, данные выше, справедливы, если P и Q близки одна к другой, а именно этот случай и нуждался в исследовании. Если же P и Q удалены одна от другой, то, очевидно, повторное ядро непрерывно.

§ 2. Символические обозначения.

Введём теперь некоторую символику, которая значительно упростит нам изложение.

Условимся функцию

$$\psi(P) = \int\limits_D K(P, Q)\,\varphi(Q)\,dQ$$

обозначать символом

$$\psi = A\varphi. \tag{XIX.11}$$

В этом обозначении уравнение (XIX.1) перепишется так:

$$\varphi - \lambda A\varphi = f.$$

Далее положим:

$$A(A\varphi)=\int\limits_D K(P,P_1)\left[\int\limits_D K(P_1,Q)\varphi(Q)\,dQ\right]dP_1=$$

$$=\int\limits_D K_2(P,Q)\varphi(Q)\,dQ=A^2\varphi,$$

и аналогично

$$A^m\varphi=\int\limits_D K_m(P,Q)\varphi(Q)\,dQ.$$

Очевидно,

$$A^m(A^n\varphi)=A^{m+n}\varphi.$$

Пусть теперь символ $E\varphi$ обозначает функцию φ. Такое обозначение даёт возможность написать уравнение (XIX.1) в виде

$$(E-\lambda A)\varphi=f; \tag{XIX.12}$$

E и A мы будем называть операторами.

В этих обозначениях ряд (XIX.3) перепишется в виде:

$$\varphi=(E+\lambda A+\lambda^2A^2+\ldots+\lambda^mA^m+\ldots)f. \tag{XIX.13}$$

Мы можем рассматривать многочлены от A с постоянными коэффициентами. Обозначение оператора

$$(aA^m+bA^{m-1}+\ldots+cE)\varphi \tag{XIX.14}$$

понятно само собою.

Если A и B — два оператора, то удобно результат $A(B\varphi)$ обозначать символом $AB\varphi$. При этом AB называется произведением операторов. Операторы типа (XIX.14) перемножаются так же, как обыкновенные многочлены, если помнить, что умножение на E не меняет никакого оператора, т. е. что E играет роль единицы.

Вообще говоря, если A и B — два разных оператора, например, отвечающих различным ядрам K, то произведения AB и BA представляют собою различные операторы, но для операторов вида (XIX.14) множители в произведении можно переставлять в силу того, что

$$aA^m=A^ma,\quad A^mA^k=A^kA^m=A^{k+m},$$

$$A^mE=EA^m.$$

Кроме умножения в операторах (XIX.14) можно производить деление без остатка или с остатком. В самом деле, в формуле

$$F(A)=R(A)\,\Phi(A)+T(A),$$

где F, R, Φ и T — многочлены от оператора A, оператор F есть делимое, Φ — делитель, R — частное, а T — остаток.

Иногда удобно располагать многочлен по возрастающим степеням A.

Справедлива, например, формула

$$E=(E+\lambda A+\lambda^2 A+\ldots+\lambda^{m-1}A^{m-1})(E-\lambda A)+\lambda^m A^m. \quad \text{(XIX.15)}$$

Если бы определить ещё понятие предельного перехода и при этом для некоторых λ значения $\lambda^m A^m$ стремились бы к нулю с возрастанием m, то мы получили бы:

$$E=\left(E+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i A^i\right)(E-\lambda A).$$

При этом было бы удобно считать ряд $E+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i A^i$ равным $\frac{E}{E-\lambda A}$ или $(E-\lambda A)^{-1}$. Однако рядами мы в настоящий момент заниматься не будем.

Вместе с оператором A мы будем ещё рассматривать союзный оператор $\overline{A}$, определяемый по формуле

$$\overline{A}\varphi=\psi(Q)=\int_D K(P,Q)\varphi(P)\,dP; \quad \text{(XIX.16)}$$

очевидно, что для A^m союзный оператор будет $\overline{A}^m$; для символа E мы определим союзный оператор как само E.

При таком определении имеет место формула

$$\int_D \psi(P)\,B_\varphi\,dP=\int_D \overline{B}_\psi\,\varphi(P)(P)\,dP, \quad \text{(XIX.17)}$$

где $\overline{B}$ — оператор, союзный с B.

В самом деле, пусть $B_\varphi=\int_D K(P,Q)\varphi(Q)\,dQ$; тогда $\overline{B}_\psi= =\int K(Q,P)\psi(Q)\,dQ$, и простая подстановка этих выражений в (XIX.17) доказывает справедливость этой формулы.

§ 3. Связь между решениями итерированных уравнений.

Имея эту символику, можно уже перейти к доказательству теорем Фредгольма для уравнения (XIX.12), если ядро оператора A подчиняется условию (XIX.2).

Перепишем уравнение (XIX.12) в виде

$$\varphi=f+\lambda A\varphi$$

и подставим в правую часть вместо φ его выражение, взятое из самого уравнения. Будем иметь

$$\varphi = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 \varphi. \tag{XIX.18}$$

Проделывая с уравнением (XIX.18) ту же операцию, будем иметь

$$\varphi = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \lambda^3 A^3 \varphi$$

и вообще

$$\varphi = f + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda^i A^i f + \lambda^m A^m \varphi. \tag{XIX.19}$$

Если m достаточно велико, то уравнение (XIX.19) будет иметь ограниченное ядро, и все теоремы Фредгольма по отношению к нему будут иметь место. Однако это обстоятельство ещё недостаточно для нас, ибо уравнение (XIX.19), вообще говоря, не эквивалентно (XIX.12). Помимо всех решений уравнения (XIX.12), оно может иметь ещё и посторонние. Перепишем уравнение (XIX.19) в виде:

$$(E - \lambda^m A^m)\varphi = \left(E + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda^i A^i\right) f. \tag{XIX.20}$$

Оператор в левой части уравнения (XIX.20) можно разложить на множители. Пусть e — какой-либо первообразный корень степени m из единицы.

Справедлива формула

$$(E - \lambda A)(E - \lambda e A)(E - \lambda e^2 A) \ldots (E - \lambda e^{m-1} A) = (E - \lambda^m A^m). \tag{XIX.21}$$

Её справедливость вытекает из обычного разложения

$$(x^m - y^m) = (x - y)(x - ey)(x - e^2 y) \ldots (x - e^{m-1} y).$$

Одновременно с (XIX.21) справедлива также формула

$$(E - \lambda \bar{A})(E - \lambda e \bar{A}) \ldots (E - \lambda e^{m-1} \bar{A}) = (E - \lambda^m \bar{A}^m). \tag{XIX.22}$$

Однородные уравнения

$$(E - \lambda^m A^m)\varphi = 0, \tag{XIX.23}$$

$$(E - \lambda^m \bar{A}^m)\varphi = 0 \tag{XIX.24}$$

либо одновременно не имеют нетривиальных решений, либо имеют одинаковое число таких линейно независимых решений. Некоторые из решений (XIX.23) могут случайно оказаться решениями уравнения

$$(E - \lambda A)\varphi = 0,$$

другие нет. Мы докажем сейчас основную лемму.

Лемма 2. Каждое нетривиальное решение уравнения (XIX.23) при данном λ есть линейная комбинация нетривиальных решений уравнений:

$$(E-\lambda e^k A)\varphi=0,\ k=0,1,\ldots,(m-1). \qquad \text{(XIX.25)}$$

Эти решения линейно независимы между собой.

Эта лемма эквивалентна тому утверждению, что система линейно независимых решений (XIX.23) просто совпадает с системой всех линейно независимых решений всех уравнений (XIX.25).

Для доказательства составим m операторов:

$$D_k=\frac{1}{m}[E+\lambda e^k A+\lambda^2 e^{2k}A^2+\ldots+\lambda^{m-1}e^{k(m-1)}A^{m-1}],$$
$$k=0,1,\ldots,(m-1).$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} D_k=E. \qquad \text{(XIX.26)}$$

В самом деле,

$$\sum_{k=0}^{m-1} D_k=E+\frac{1}{m}A\lambda\sum_{k=0}^{m-1} e^k+\frac{1}{m}A^2\lambda^2\sum_{k=0}^{m-1} e^{2k}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{m}A^{m-1}\lambda^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} e^{(m-1)k}.$$

Но, если s — целое число, не равное нулю и меньшее m, то по формуле для суммы геометрической прогрессии получим:

$$\sum_{k=0}^{m-1} e^{sk}=\frac{e^{sm}-1}{e^s-1}=0,$$

откуда и вытекает (XIX.26).

Простое почленное перемножение даёт ещё формулу

$$(E-\lambda e^k A)D_k=\frac{1}{m}(E-\lambda^m A^m). \qquad \text{(XIX.27)}$$

Из формулы (XIX.27) следует разложение

$$D_k=\frac{1}{m}\prod_{\substack{s=0\\ s\neq k}}^{m-1}(E-\lambda e^s A),$$

которое легко также проверить непосредственно, взяв выражение для D_k.

Следовательно, если φ_s есть решение уравнения

$$(E-\lambda e^s A)\varphi_s=0$$

и если $s\neq k$, то $D_k\varphi_s=0$. Отсюда же следует:

$$D_k\varphi_k=\Big(E-\sum_{\substack{s=0\\ s\neq k}}^{m-1} D_s\Big)\varphi_k=E\varphi_k=\varphi_k.$$

Теперь уже нетрудно доказать нашу теорему.

Установим прежде всего, что функции $\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}, \ldots, \varphi_{k_j}$, если $k_1, k_2, \ldots, k_j$ различны, будут линейно независимы. В самом деле, применяя к предполагаемому линейному соотношению

$$\alpha_1\varphi_{k_1}+\alpha_2\varphi_{k_2}+\ldots+\alpha_j\varphi_{k_j}=0,$$

где какое-то из α_k, например $\alpha_i\neq 0$, оператор D_{k_i}, получим

$$\alpha_i\varphi_{k_i}=0,$$

что противоречит условию.

Пусть теперь φ есть решение уравнения

$$(E-\lambda^m A^m)\varphi=0.$$

Положим

$$\varphi_k=D_k\varphi.$$

Из (XIX.27) вытекает, что

$$(E-\lambda e^k A)\varphi_k=0.$$

С другой стороны, на основании (XIX.26), имеем

$$\sum_{k=0}^{m-1}\varphi_k=\varphi,$$

что и доказывает нашу лемму.

З а м е ч а н и е. Можно доказать более общее утверждение. Решения уравнений

$$(E-\lambda_1 A)\varphi_1=0,$$
$$(E-\lambda_2 A)\varphi_2=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(E-\lambda_k A)\varphi_k=0,$$

где все $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ различны, будут всегда линейно независимыми между собой.

Действительно, легко доказать, что если существует зависимость

$$\alpha_1\varphi_1+\ldots+\alpha_k\varphi_k=0, \tag{XIX.28}$$

в которой ни одно α_i, $i=1, \ldots k$ не обращается в нуль, связывающая k функций, то существует и другая зависимость

$$\beta_1\varphi_1 + \ldots + \beta_{k-1}\varphi_{k-1} = 0, \qquad \text{(XIX.29)}$$

связывающая $(k-1)$ функцию, в которой ни один коэффициент не равен нулю. Для доказательства достаточно применить оператор $(E-\lambda_k A)$ к предполагаемому равенству (XIX.28). Мы получим (XIX.29). Повторяя процесс, увидим, что из (XIX.28) следует

$$\gamma\varphi_1 = 0,$$

что невозможно. Это и требовалось доказать.

§ 4. Теоремы Фредгольма.

Теорема 1. Уравнение

$$(E-\lambda A)\varphi = 0 \qquad \text{(XIX.30)}$$

с регуляризуемым ядром может иметь нетривиальные интегрируемые решения только при некоторых изолированных значениях λ.

Рассмотрим уравнение

$$(E-\mu A^m)\varphi = 0, \qquad \text{(XIX.31)}$$

где m выбрано так, что A^m является оператором с непрерывным ядром; из доказанной теоремы следует, что уравнение (XIX.31) будет иметь нетривиальные решения тогда и только тогда, если $\mu=\mu_0$, где

$$\mu_0 = \lambda_0^m, \qquad \text{(XIX.32)}$$

а λ_0—характеристическое число уравнения (XIX.30) Но, по теории Фредгольма, уравнение (XIX.31) имеет решения лишь для изолированных значений μ_0. При этом множество λ_0, удовлетворяющих (XIX.32), не будет иметь ни одной предельной точки. Теорема доказана.

Теорема 2. Число линейно независимых решений уравнения $(E-\lambda A)\varphi=0$ и уравнения $(E-\lambda \bar{A})\psi=0$ при данном λ конечно и совпадает.

Для доказательства рассмотрим две серии уравнений

$$(E-\lambda^{p_i}A^{p_i})\varphi = 0,$$

а также

$$(E-\lambda^{p_i}\bar{A}^{p_i})\psi = 0,$$

где p_i—простые числа. В числе решений двух уравнений каждой серии, соответствующих различным p_i, при одном и том же

λ, общими являются только те, которые соответственно принадлежат уравнениям:

$$(E-\lambda A)\varphi=0 \text{ или } (E-\lambda\overline{A})\psi=0.$$

Это следует из того, что два числа $e_i^{k_1}$ и $e_j^{k_2}$ не могут быть равны между собой, если e_i и e_j — корни степеней p_i и p_j из единицы, причём $p_i \neq p_j$.

Число всех решений уравнений $(E-\lambda^{p_i}A^{p_i})\varphi=0$, так же как и число всех решений уравнений $(E-\lambda^{p_i}\overline{A}^{p_i})\psi=0$, конечно [см. § 5 (XVIII)]. Если бы их имелось бесконечно много, то уравнение $(E-\lambda^*A)\varphi=0$ имело бы бесконечное множество характеристических чисел λ^*, равных λ по абсолютной величине. Значит, начиная с некоторого p_i уравнения $(E-\lambda^{p_i}A^{p_i})\varphi=0$ и $(E-\lambda^{p_i}\overline{A}^{p_i})\psi=0$ будут иметь те и только те решения, которые имеют уравнения $(E-\lambda A)\varphi=0$ и $(E-\lambda\overline{A})\psi=0$. Так как у первых число решений одинаково, то и у вторых оно совпадает, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения

$$(E-\lambda A)\varphi=f \tag{XIX.33}$$

является

$$\int\limits_D f\psi_s\,dP=0, \tag{XIX.34}$$

где $\psi_s(P)$ — полная система линейно независимых решений уравнения

$$(E-\lambda\overline{A})\psi=0. \tag{XIX.35}$$

Покажем сначала необходимость этого условия; умножая обе части (XIX.33) на ψ_s и интегрируя, получим:

$$\int\limits_D \psi_s(E-\lambda A)\varphi\,dP=\int\limits_D \psi_s f\,dP.$$

Далее, пользуясь формулой (XIX.17), имеем:

$$\int\limits_D \psi_s f\,dP=\int\limits_D \varphi(E-\lambda\overline{A})\psi_s\,dP=0.$$

Необходимость условия установлена.

Покажем теперь достаточность этого условия. Пусть оно выполнено. Составим новое уравнение:

$$\begin{aligned}(E-\lambda eA)(E-\lambda e^2A)\ldots(E-\lambda e^{m-1}A)(E-\lambda A)\varphi=(E-\lambda^m A^m)\varphi=\\ =(E-\lambda eA)(E-\lambda e^2A)\ldots(E-\lambda e^{m-1}A)f.\end{aligned} \tag{XIX.36}$$

Выберем m так, чтобы ни одно из уравнений

$$(E-\lambda e^t A)\varphi=0,$$
$$(E-\lambda e^t \overline{A})\psi=0,$$
$$t=1, 2, \ldots, m-1,$$

не имело нетривиальных решений при рассматриваемом значении λ.

Правая часть уравнения (XIX.36) ортогональна к решениям уравнения (XIX.35), а следовательно, и к решениям уравнения $(E-\lambda^m \overline{A}^m)\psi=0$, совпадающим с решениями (XIX.35). Таким образом, уравнение (XIX.36) разрешимо.

Пусть его решение будет φ_0. Тогда, полагая $(E-\lambda A)\varphi_0-f=\chi$, имеем из (XIX.36):

$$(E-\lambda eA)(E-\lambda e^2 A)\ldots(E-\lambda e^{m-1}A)\chi=0.$$

Отсюда следует, что χ есть линейная комбинация решений уравнений

$$(E-\lambda e^t A)\varphi=0,$$

т. е. равна нулю тождественно.

Теорема доказана.

ЛЕКЦИЯ XX.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФРЕДГОЛЬМА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА.

§ 1. Вывод свойств интегральных уравнений.

Развитая нами теория уравнений Фредгольма позволяет перейти к непосредственному решению задач Дирихле и Неймана, которые были нами ранее сведены к задаче отыскания решений некоторых интегральных уравнений.

Мы начнём с некоторых вспомогательных предложений.

Везде в дальнейшем мы будем рассматривать поверхности S, гладкие в смысле Ляпунова.

Лемма 1. Пусть $\nu(S)$ удовлетворяет условию (XV.12), и потенциал простого слоя

$$v = \int\limits_S \frac{\nu(S)\,dS}{r} \tag{XX.1}$$

имеет нормальную производную $\left.\frac{dv}{dn}\right|_e$ на S, равную нулю. Тогда плотность $\nu(S)$ равна нулю.

Докажем эту лемму. В силу теоремы 4 (XV) первые производные от v непрерывны, поэтому можем применить теорему единственности для внешней задачи Неймана, доказанную нами раньше.

Рассматриваемый потенциал есть гармоническая функция вне поверхности S, обращающаяся в нуль на бесконечности, как $\frac{1}{r}$. Её нормальная производная извне равна нулю на S. Следовательно, везде вне S этот потенциал тождественно равен нулю.

Потенциал простого слоя есть функция, непрерывная во всём пространстве. Следовательно, его предельное значение изнутри тоже есть нуль.

Применим теорему единственности для внутренней задачи Дирихле. Рассматриваемый потенциал есть гармоническая функция внутри S. Её предельное значение на поверхности есть нуль. Следовательно, она тождественно равна нулю.

При этом предельное значение её нормальной производной изнутри есть также нуль.

Пользуясь тем, что

$$\left.\frac{dv}{dn}\right|_e - \left.\frac{dv}{dn}\right|_i = 4\pi\nu(S), \tag{XX.2}$$

и замечая, что нормальная производная v имеет пределом нуль и изнутри и извне, видим, что плотность есть нуль, что и требовалось доказать.

Если предельное значение $\left.\frac{dv}{dn}\right|_i = 0$ на S, то в силу теоремы единственности для задачи Неймана функция v есть постоянная внутри S.

Лемма 2. Если в тех же предположениях относительно $\nu(S)$ имеем $\left.\frac{dv}{dn}\right|_i = 0$ и $v_i = 0$, то плотность тождественно равна нулю. Доказательство этой леммы совпадает с доказательством предыдущей. Потенциал v есть функция непрерывная, значит, $v_e = 0$.

Из единственности решения внешней задачи Дирихле следует, что v — тождественный нуль также и вне S. Но при этом и формула (XX.2) даёт

$$\nu(S) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Эти леммы позволяют непосредственно перейти к исследованию интегральных уравнений Фредгольма для задач Дирихле и Неймана, выведенных нами в лекции XVI.

Мы получили уравнения:

для *внутренней задачи Дирихле*

$$\mu(S_0) + \iint\limits_S K(S_0, S)\mu(S)\,dS = \varphi(S_0); \tag{XX.3}$$

для *внешней задачи Неймана*

$$\nu(S_0) + \iint\limits_S K(S, S_0)\nu(S)\,dS = \psi(S_0); \tag{XX.4}$$

для *внешней задачи Дирихле*

$$\mu(S_0) - \iint\limits_S K(S_0, S)\mu(S)\,dS = \varphi(S_0); \tag{XX.5}$$

для *внутренней задачи Неймана*

$$\nu(S_0) - \iint\limits_S K(S, S_0)\nu(S) = \psi(S). \tag{XX.6}$$

Ядро $K(S_0, S)$ имеет вид

$$K(S_0, S) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(n, r)}{r^2}. \tag{XX.7}$$

В силу (XV.6) имеем неравенство

$$|K(S_0, S)| \leqslant \frac{A}{r^{2-\delta}}.$$

Следовательно, ядро $K(S_0, S)$ принадлежит к числу регуляризуемых, ибо в нашем случае, пользуясь обозначениями предыдущей лекции [см. лемму 1 (XIX)], имеем:

$$n = 2, \quad \alpha = 2 - \delta < n.$$

Таким образом, для этих уравнений имеют место все теоремы Фредгольма.

§ 2. Исследование уравнений.

Теорема 1. Уравнения (XX.3) и (XX.4) всегда имеют определённые единственные решения.

Докажем это. Допустим, что интегральное уравнение

$$\nu(S_0) + \iint\limits_S K(S, S_0)\,\nu(S)\,dS = 0 \tag{XX.8}$$

имеет нетривиальное решение. На основании теоремы 3 (XV) функция

$$\iint\limits_S K(S, S_0)\,\nu(S)\,dS = \iint\limits_S \frac{\cos\psi}{r^2}\,\nu(S)\,dS$$

будет удовлетворять условию (XV.12).

В силу (XX.8) этому условию будет удовлетворять и $\nu(S)$.

Следовательно, рассматриваемое уравнение (XX.8) может иметь лишь решения, удовлетворяющие условию (XV.12).

Потенциал простого слоя, плотность которого удовлетворяет (XX.8), будет, следовательно, иметь непрерывные вплоть до границы производные первого порядка. Предельные значения нормальной производной этого потенциала выражаются, как мы видели (теорема § 2, XV), через плотность формулой

$$2\pi\left(\nu(S_0) + \iint\limits_S K(S, S_0)\,\nu(S)\,dS\right).$$

Наша лемма говорит, таким образом, что однородное уравнение, соответствующее (XX.4), не имеет нетривиальных решений.

При этом первая теорема Фредгольма даёт нам, что союзное однородное уравнение, совпадающее с (XX.3) при $f = 0$, тоже не имеет нетривиальных решений. Далее, из той же теоремы Фредгольма следует существование определённого единственного решения у (XX.3) и (XX.4) при произвольных правых частях.

Следовательно, мы можем получить решение этих уравнений, а одновременно и решение *внутренней задачи Дирихле* и *внешней задачи Неймана*.

Переходя к решению *внешней задачи Дирихле* и *внутренней задачи Неймана*, докажем следующую теорему.

Теорема 2. Каждое из уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\mu(S_0) - \iint_S K(S_0, S)\,\mu(S)\,dS = 0 \\ \text{и}\qquad &\\ &\nu(S_0) - \iint_S K(S, S_0)\,\nu(S)\,dS = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XX.9)}$$

имеет одну и только одну фундаментальную функцию.

Прежде всего заметим, что уравнения (XX.8) и (XX.9) союзны (сопряжены), и, следовательно, число линейно независимых решений у них одно и то же.

Для первого из уравнений (XX.9) такой фундаментальной функцией служит единица. В самом деле, потенциал двойного слоя

$$w = \iint_S \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,\mu(S)\,dS$$

при $\mu = 1$ даёт величину телесного угла, под которым видна поверхность S, и, следовательно, его значения извне есть нуль. Но левая часть первого из уравнений (XX.9) есть как раз предельное значение потенциала двойного слоя извне, и поэтому $\mu = 1$ должно обращать эту левую часть в нуль. Следовательно, число фундаментальных функций (XX.9) не меньше одной.

Покажем, что каждое из уравнений (XX.9) не может иметь двух линейно независимых решений.

Повторяя в точности рассуждение, приведённое в доказательстве теоремы 1 (XX), убеждаемся, что все решения второго из уравнений (XX.9) удовлетворяют условию (XV.12).

Если бы две фундаментальные функции $\nu_1(S)$ и $\nu_2(S)$ существовали, то оба потенциала

$$v_1 = \iint_S \frac{\nu_1(S)}{r}\,dS \quad \text{и} \quad v_2 = \iint_S \frac{\nu_2(S)}{r}\,dS$$

были бы гармоническими функциями внутри области, ограниченной S, и имели бы в этой области первые производные, непрерывные вплоть до границы. При этом предельные значения $\left.\frac{dv_1}{dn}\right|_i$ и $\left.\frac{dv_2}{dn}\right|_i$ у обеих функций были бы равны нулю; обе эти функции представляли бы собой на основании теоремы единственности решения задачи Неймана не что иное, как постоянные. Заменяя ν_i, $i=1, 2$, на $\alpha_i\nu_i$, где α_i, $i=1, 2$ — постоянные множители, мы можем добиться того, чтобы оба потенциала v_1 и v_2 были бы равны единице внутри области. Предположим, что это сделано. При этом потенциал

$$v=v_1-v_2=\iint\limits_S \frac{1}{r}(\nu_1(S)-\nu_2(S))\,dS$$

с плотностью $\nu_1(S)-\nu_2(S)$ будет равен нулю внутри.

Его предельное значение v_i будет также равно нулю по непрерывности потенциала простого слоя.

По лемме 2 плотность $\nu_1(S)-\nu_2(S)$ должна равняться нулю, что и доказывает нашу теорему.

Нами доказано существование собственной функции $\nu_0(S)$ второго уравнения (XX.9). Можно считать, что величина потенциала $v_0=\iint\limits_S \frac{\nu_0(S)}{r}dS$ внутри области Ω, ограниченной поверхностью S, равна единице. При этом функция $\nu_0(S)$ даёт распределение электрических зарядов на поверхности проводника, заполняющего область Ω, ограниченную поверхностью S. Задача о нахождении потенциала заряженного проводника носит название *задачи Робена*, а сам потенциал v_0 называется *потенциалом Робена*.

Внутренняя задача Неймана заключалась в отыскании гармонической функции, такой, что

$$\left.\frac{du}{dn}\right|_i=f_1(S). \tag{XX.10}$$

Теорема 3. Для существования решения внутренней задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы правая часть (XX.10), т. е. функция $f_1(S)$, удовлетворяла условию

$$\iint\limits_S f_1(S)\,dS=0. \tag{XX.11}$$

Необходимость этого условия вытекает из того, что если применить формулу Грина (V.16) к u и 1 (а обе эти функции гармонические), то мы получим:

$$0=\iint\limits_S \frac{du}{dn}dS=\iint\limits_S f_1(S)\,dS.$$

Достаточность следует при этом из того, что единица есть единственное решение интегрального уравнения (XX.8), союзного с (XX.9). Поэтому, если свободный член уравнения (XX.6) $\psi(S)$ ортогонален к единице, то это уравнение по теореме Фредгольма разрешимо. Но $\psi(S)$ отличается лишь множителем от $f_1(S)$, и, следовательно, условие (XX.11) необходимо и достаточно для решения уравнения (XX.6), а с ним и задачи Неймана.

Перейдем теперь к решению *внешней задачи Дирихле.*

Как мы видели, интегральное уравнение (XX.5) может и не иметь решения. Этого можно было ожидать с самого начала. Искомая гармоническая функция u, удовлетворяющая условию

$$u|_e = f(S), \tag{XX.12}$$

как мы видели, единственна. Она будет стремиться к нулю на бесконечности, вообще говоря, как $\frac{A}{r}$ [см. теорему 1 (XII)]. (Как, например, гармоническая функция $\frac{1}{r}$, равная единице на единичной сфере.)

Мы же пытаемся представить функцию в виде потенциала двойного слоя, который убывает, как $\frac{A}{r^2}$. Разумеется, такое представление может оказаться невозможным. Попробуем теперь в соответствии с этим искать решение внешней задачи Дирихле в виде:

$$u = \frac{\alpha}{r_0} + u_1,$$

где α — неопределённая постоянная, r_0 — расстояние точки (x, y, z) до начала координат, которую мы будем считать выбранной внутри S, а u_1 — потенциал двойного слоя:

$$u_1 = \iint\limits_S \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\mu(S)\,dS.$$

Значения u_1 на поверхности S будут

$$u_1|_S = f(S) - \frac{\alpha}{r_0}\Big|_S.$$

Уравнение (XX.5) превратится при этом в уравнение

$$\mu(S_0) - \iint\limits_S K(S_0, S)\mu(S)\,dS = \varphi(S_0) + \frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{r_0}\Big|_{S_0}. \tag{XX.13}$$

Потребуем, чтобы свободный член этого уравнения был ортогонален к $\nu_0(S)$—собственной функции второго уравнения (XX.9). Мы получим:

$$\iint\limits_S \varphi(S_0)\,\nu_0(S_0)\,dS_0 + \frac{\alpha}{2\pi}\iint\limits_S \frac{\nu(S_0)}{r_0}\,dS_0 = 0.$$

Интеграл во втором слагаемом равен единице по предположению, и мы получим:

$$\alpha = -2\pi\iint\limits_S \varphi(S_0)\,\nu_0(S_0)\,dS_0.$$

Определив таким образом постоянную α, мы получим из (XX.13) разрешимое уравнение.

Решая его, получим тем самым решение внешней задачи Дирихле.

ЛЕКЦИЯ XXI.

ФУНКЦИЯ ГРИНА.

§ 1. Дифференциальные операторы с одной независимой переменной.

Во многих задачах математической физики, с которыми мы встречались, неизвестная функция определялась помимо дифференциального уравнения ещё условиями на границах области задания неизвестной функции.

Таковы были в своём большинстве задачи, связанные с решением уравнений эллиптического типа. Несколько позднее мы будем иметь случай убедиться в том, что и при решении краевых задач для уравнений других типов умение решать такую задачу с условиями на границе области приносит существенную пользу. Для того чтобы детальнее исследовать важнейшие свойства решений этих краевых задач, мы зададимся целью дать в явном виде представление таких решений.

Начнём с простейшего случая. Будем искать решение обыкновенного уравнения 2-го порядка

$$Ly = p(x)\,y'' + q(x)\,y' + r(x)\,y = f(x) \qquad \text{(XXI.1)}$$

в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяющее некоторым условиям на границах $x = 0$ и $x = 1$.

Хотя эта задача относится, формально говоря, к теории обыкновенных дифференциальных уравнений, тем не менее мы разберём её подробно. Разбору её нам придётся предпослать несколько важных предварительных замечаний.

Составим оператор, сопряжённый с оператором Ly (см. § 2 (V)). Этот сопряжённый оператор будет иметь вид:

$$Mz = (p(x)\,z)'' - (q(x)\,z)' + r(x)\,z. \qquad \text{(XXI.2)}$$

Операторы M и L связаны между собой соотношением:

$$zLy - yMz = \frac{d}{dx}\left(pz\frac{dy}{dx} - y\frac{d(pz)}{dx} + qyz\right).$$

Формула Грина для отрезка (0,1) для этих операторов имеет вид:

$$\{p_0y_0'z_0 - p_0y_0z_0' + (q_0 - p_0')\,y_0z_0\} - \{p_1y_1'z_1 - p_1y_1z_1' + (q_1 - p_1')y_1z_1\} + \\ + \int\limits_0^1 (zLy - yMz)\,dx = 0, \qquad \text{(XXI.3)}$$

где индексы 0 и 1 означают значение функций соответственно при $x=0$ и при $x=1$, например:

$$p_0 = p(0), \quad y_0 = y(0), \quad z_1' = z'(1).$$

Если функции y и z выбраны так, что фигурные скобки в формуле (XXI.3) обращаются в нуль, то эта формула упрощается, и мы получим:

$$\int\limits_0^1 (zLy - yMz)\,dx = 0. \qquad \text{(XXI.4)}$$

Может случиться, что формула (XXI.4) справедлива для любой пары функций y и z, принадлежащих некоторым двум семействам $\{y\}$ и $\{z\}$. Такие два семейства мы будем при этом называть сопряжёнными.

Разберём несколько примеров сопряжённых семейств функций для оператора (XXI.1).

Будем изучать семейства функций y, удовлетворяющие на границах одному или двум линейным условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I)}\ y_0 = 0, \\ &\text{II)}\ p_0y_0' + \alpha y_0 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXI.5)}$$

на конце $x=0$ и аналогично

$$\left.\begin{aligned} &\text{I)}\ y_1 = 0, \\ &\text{II)}\ p_1y_1' + \beta y_1 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXI.6)}$$

на конце $x=1$.

Представим первую фигурную скобку формулы (XXI.3) в виде

$$-y_0\,[p_0z_0' + (p_0' - q_0 + \alpha)\,z_0] + z_0\,[p_0y_0' + \alpha y_0],$$

где α — некоторое постоянное. Тогда формула (XXI.3) перепишется так:

$$-y_0\,[(pz)' + (\alpha - q)\,z]_{x=0} + z_0\,[py' + \alpha y]_{x=0} + \\ + \int\limits_0^1 (zLy - yMz)\,dx + y_1\,[(pz)' + (\beta - q)\,z]_{x=1} - \\ - z_1\,[py' + \beta y]_{x=1} = 0, \qquad \text{(XXI.7)}$$

где β — также постоянное.

Из этого представления следует несколько простых следствий.

Если семейство $\{y\}$ удовлетворяет на конце $x=0$ одному первому условию, то семейство $\{z\}$ должно удовлетворять условию:

$$\text{I}^a)\ z_0=0.$$

Если семейство $\{y\}$ удовлетворяет только второму условию на конце $x=0$, то семейство $\{z\}$ должно удовлетворять условию:

$$\text{II}^a)\ p_0z_0'+(p_0'-q_0+\alpha)z_0=0.$$

Для семейства $\{y\}$, подчинённого обоим условиям, т. е. у которого $y_0'=y_0=0$, можно функции $\{z\}$ никаким условиям при $x=0$ не подчинять. Обратно, если не накладывать ограничений на семейство $\{y\}$, то функции $\{z\}$ нужно подчинить условиям $z_0=z_0'=0$. Совершенно так же можно исследовать конец $x=1$, где условия, разбираемые нами, будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\text{I})\ & y_1=0,\\
\text{II})\ & p_1y_1'+\beta y_1=0,\\
\text{I}^a)\ & z_1=0,\\
\text{II}^a)\ & p_1z_1'+(p_1'-q_1+\beta)z_1=0.
\end{aligned}$$

Можно рассматривать и более общий тип условий, накладываемых на семейство $\{y\}$.

Эти условия общего типа могут связывать значения y и y' на обоих концах.

Мы не будем заниматься перечислением или классификацией таких условий, укажем лишь на способ их получения.

Билинейная форма

$$\Phi(y_0,y_0',y_1,y_1';\ z_0,z_0',z_1,z_1')\equiv p_0y_0'z_0-p_0y_0z_0'+\\
+(q_0-p_0')y_0z_0-p_1y_1'z_1+p_1q_1z_1'-(q_1-p_1')y_1z_1$$

двух четвёрок переменных уничтожается для произвольных значений одной четвёрки тогда и только тогда, когда значения всех переменных другой четвёрки суть нули. Если между переменными одной четвёрки, например y_0, y_0', y_1, y_1', существуют линейные связи, то, выражая некоторые из переменных через остальные, мы превратим эту форму в другую форму, линейную относительно y, но зависящую от меньшего числа переменных. Условием уничтожения этой формы будет обращение в нуль коэффициентов при этих оставшихся переменных. Таким образом, сумма числа условий, наложенных на $\{y\}$ и на $\{z\}$, равна четырём.

Рассмотрим, например, уравнение

$$Ly\equiv y''+k^2y=0.$$

При этом $p=1$, $q=0$, $r=k^2$, и пусть условия, наложенные на семейство $\{y\}$, будут

$$y_0=y_1,$$
$$y_0'=y_1'.$$

Согласно нашей теории форма Φ примет вид:

$$\Phi\equiv y_0(z_0'-z_1')+y_0'(z_0-z_1)=0.$$

Следовательно, сопряжённые условия будут:

$$z_0=z_1,$$
$$z_0'=z_1'.$$

§ 2. Сопряжённые операторы и сопряжённые семейства.

Понятие о сопряжённых семействах или сопряжённых условиях относится не только к обыкновенным уравнениям второго порядка. Его легко перенести на случай, когда оператор L есть линейный дифференциальный оператор с частными производными любого порядка.

Определение. *Оператор* Mv мы будем называть *сопряжённым* с оператором Lu и два *семейства функций* $\{u\}$ и $\{v\}$, заданных в области Ω, мы будем называть *сопряжёнными* относительно L и M в этой области, если

$$\int_\Omega vLu\,d\Omega=\int_\Omega uMv\,d\Omega. \qquad \text{(XXI.8)}$$

Условия, которыми определяются два сопряжённых относительно операторов L и M семейства, носят название сопряжённых. Этот термин можно употреблять и для неоднородных условий с теми же левыми частями, что и первоначальные.

Примечание. *Оператор* L называется *самосопряжённым*, если ему сопряжённый совпадает с ним самим, т. е.

$$Mu=Lu.$$

Аналогично семейство функций, совпадающее со своим сопряжённым, называется *самосопряжённым семейством*.

Мы рассмотрим ещё несколько простейших примеров.

Пример 1.

$$Ly=p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny.$$

Семейство функций $\{y\}$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ выберем так, чтобы иметь:

$$y_0=y_0'=\ldots=y_0^{(n-1)}=0. \qquad \text{(XXI.9)}$$

Легко видеть, что сопряжённый оператор будет:

$$Mz = (-1)^n \frac{d^n(p_0 z)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(p_1 z)}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n z.$$

Заметив, что

$$\varphi \frac{d^m \psi}{dx^m} + (-1)^m \psi \frac{d^m \varphi}{dx^m} =$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\varphi \frac{d^{m-1}\psi}{dx^{m-1}} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^{m-2}\psi}{dx^{m-2}} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{d^{m-3}\psi}{dx^{m-3}} - \ldots\right],$$

легко взять в конечном виде неопределённый интеграл

$$\int (zLy - yMz)\, dx.$$

Не вычисляя его до конца, мы видим, что он выразится как билинейная форма относительно производных

$$y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-1)},$$

коэффициенты которой суть функции переменной x.

В силу условий (XXI.9) значение этой билинейной формы при $x=0$ есть нуль. Для того чтобы её значение при $x=1$ также было нулём, достаточно положить:

$$z_1 = z_1' = \ldots = z_1^{(n-1)} = 0. \qquad \text{(XXI.10)}$$

(Это же условие и необходимо, если мы ничего не знаем относительно значений y и её производных при $x=1$.)

При этом

$$\int_0^1 (zLy - yMz)\, dx = 0.$$

Таким образом, условия (XXI.10) — сопряжённые с (XXI.9). Вообще сопряжёнными с условиями

$$y_0 = a_0,\ y_0' = a_1,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)} = a_{n-1}$$

будут условия

$$z_1 = b_0,\ z_1' = b_1,\ \ldots,\ z_1^{(n-1)} = b_{n-1}.$$

Пример 2. Рассмотрим оператор

$$Lu = \Delta u \qquad \text{(XXI.11)}$$

и пусть изучается семейство функций $\{u\}$ в области Ω двух переменных x, y, ограниченной контуром $\varkappa$, удовлетворяющих условию

$$\left[\frac{du}{dn} + \alpha u + \beta \frac{du}{ds}\right]_s = \varphi(s), \qquad \text{(XXI.12)}$$

где $\frac{du}{dn}$ — производная по внутренней нормали в точке контура, $\frac{du}{ds}$ — производная по касательной, соответствующей положительному обходу контура. Формула Грина даёт:

$$\iint_{\Omega}(u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\Omega = \int_s \left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn}\right)ds =$$

$$= \int_s \left\{v\left[\frac{du}{dn} + \alpha u + \beta\frac{du}{ds}\right] - u\frac{dv}{dn} - v\left(\alpha u + \beta\frac{du}{ds}\right)\right\}ds.$$

Интегрируя по частям член

$$\int_s \beta v\frac{du}{ds}\,ds$$

и замечая, что внеинтегральные члены пропадут, благодаря периодичности на контуре функций β, v и u, будем иметь:

$$\iint_{\Omega}(u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\Omega =$$

$$= \int_s \left\{v\left[\frac{du}{dn} + \alpha u + \beta\frac{du}{ds}\right] - u\left[\frac{dv}{dn} + \alpha v - \frac{d\,\beta v}{ds}\right]\right\}ds.$$

Естественно назвать *выражение*

$$\left[\frac{dv}{dn} + \left(\alpha - \frac{d\beta}{ds}\right)v - \beta\frac{dv}{ds}\right]_s$$

сопряжённым с (XXI.12) *относительно оператора* Δ.

Сопряжённые относительно оператора Δ семейства будут — семейство $\{u\}$, удовлетворяющее условию

$$\left[\frac{du}{dn} + \alpha u + \beta\frac{du}{ds}\right]_s = 0,$$

и семейство $\{v\}$, удовлетворяющее условию

$$\left[\frac{dv}{dn} + \left(\alpha - \frac{d\beta}{ds}\right)v - \beta\frac{dv}{ds}\right]_s = 0.$$

Для двух таких семейств получим:

$$\iint_{\Omega} v\,\Delta u\,d\Omega = \iint_{\Omega} u\,\Delta v\,d\Omega.$$

Пример 3. Если семейство $\{u\}$ есть семейство функций, не подчинённых никаким требованиям, то сопряжённое семейство в области Ω относительно оператора Лапласа будет удовлетворять двум условиям:

$$v\Big|_S = 0, \quad \frac{dv}{dn}\Big|_S = 0.$$

На этих примерах нами достаточно пояснено понятие о сопряжённых семействах и сопряжённых операторах. Переходим теперь к более детальному исследованию задачи.

§ 3. Основная лемма об интегралах сопряжённых уравнений.

Для того чтобы остановиться на чём-нибудь определённом, будем заниматься условиями типа II.

Поставим задачу.

Найти решение уравнения (XXI.1), удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{aligned} [py' + \alpha y]_{x=0} &= a_0, \\ [py' + \beta y]_{x=1} &= a_1 \end{aligned}\right\} \tag{XXI.13}$$

или условиям

$$\left.\begin{aligned} [py' + \alpha y]_{x=0} &= 0, \\ [py' + \beta y]_{x=1} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{XXI.13'}$$

Задачи подобного рода встречаются, например, если нам нужно найти форму равновесия струны переменной плотности и переменного натяжения, на концах которой задано некоторое соотношение между отклонением и составляющей на ось u натяжения струны. Переменное натяжение может зависеть от того, что струна не горизонтальна. При этом вес каждого её участка будет влиять на величину натяжения выше этого участка.

Лемма 1. Пусть $Ly \equiv py'' + qy' + ry$ и $Mz \equiv (pz)'' - (qz)' + rz$ — два сопряжённых оператора с коэффициентами $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, непрерывными на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, причём $p(x)$ обладает двумя непрерывными производными, а $q(x)$ — одной непрерывной производной на том же отрезке.

Кроме того, предполагается, что $p(x)$ нигде на нашем отрезке *не обращается в нуль*. Тогда, если $y_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Ly = 0 \tag{XXI.14}$$

и условию

$$[py' + \alpha y]_{x=0} = 0, \tag{XXI.15}$$

то функция

$$z_1(x) = \frac{y_1(x)}{p} e^{\int_c^x \frac{q}{p} dx} \tag{XXI.16}$$

есть решение сопряжённого уравнения

$$Mz = 0, \tag{XXI.17}$$

удовлетворяющее условию

$$[(pz)' + (\alpha - q) z]_{x=0} = 0, \tag{XXI.18}$$

сопряжённому с условием (XXI.15). Доказательство этой леммы можно выполнить простой проверкой.

Имеем:

$$(pz_1)' = y_1' e^{\int_c^x \frac{q}{p} dx} + y_1 \frac{q}{p} e^{\int_c^x \frac{q}{p} dx},$$

$$Mz_1 = [(pz_1)' - qz_1]' + rz_1 = e^{\int_c^x \frac{q}{p} dx} \frac{1}{p} [py_1'' + qy_1' + ry_1] = 0.$$

Таким образом, функция (XXI.16) есть действительно решение (XXI.17). Проверим теперь выполнение условия (XXI.18):

$$[(pz_1)' + (\alpha - q) z_1]_{x=0} = \left[y_1' + y_1 \frac{q}{p} + \left(\frac{\alpha}{p} - \frac{q}{p} \right) y_1 \right]_{x=0} e^{\int_c^0 \frac{q}{p} dx} =$$

$$= \left[\frac{1}{p} (py_1' + \alpha y_1) \right]_{x=0} e^{\int_c^0 \frac{q}{p} dx} = 0.$$

Лемма доказана.

Аналогично, если y_2 есть решение уравнения (XXI.14), удовлетворяющее условию

$$[py_2' + \beta y_2]_{x=1} = 0, \tag{XXI.19}$$

то

$$z_2 = \frac{y_2}{p} e^{\int_c^x \frac{q}{p} dx} \tag{XXI.20}$$

будет решением уравнения (XXI.17), удовлетворяющим условию:

$$[(pz)' + (\beta - q) z]_{x=1} = 0. \tag{XXI.21}$$

Формулам (XXI.16) и (XXI.20) можно придать несколько другую форму в случае, если y_1 и y_2 линейно независимы. Пользуясь известным выражением определителя Вронского:

$$C[y_1'y_2 - y_2'y_1] = e^{-\int\limits_c^x \frac{q}{p}dx}, \tag{XXI.22}$$

мы будем иметь

$$z_1 = \frac{y_1}{p[y_1'y_2 - y_2'y_1]},$$
$$z_2 = \frac{y_2}{p[y_1'y_2 - y_2'y_1]}. \tag{XXI.23}$$

Замечание 1. Все выкладки при доказательстве леммы останутся справедливыми, если и не предполагать, что $p(x)$ и $q(x)$ обладают производными, ибо достаточно, чтобы выражения (pz_1), $(pz_1)'$ и (qz_1) их имели, а это всегда будет иметь место. Но в этом случае каждый из множителей может оказаться недифференцируемым, и говорить о том, что функция z_1 удовлетворяет уравнению $Mz=0$, можно, только обобщив соответствующим образом понятие решения.

Замечание 2. Очевидно, что наша лемма взаимна и может быть формулирована так:

Если z_1 и z_2 — решения уравнения $Mz=0$, удовлетворяющие соответственно условиям (XXI.18) и (XXI.21), то

$$y_1 = \frac{z_1}{p} e^{\int\limits_c^x \frac{2p'-q}{p}dx} = Cpz_1 e^{-\int\limits_c^x \frac{q}{p}dx},$$

$$y_2 = \frac{z_2}{p} e^{\int\limits_c^x \frac{2p'-q}{p}dx} = Cpz_2 e^{-\int\limits_c^x \frac{q}{p}dx},$$

где C — некоторое постоянное, являются решениями уравнения $Ly=0$, удовлетворяющими соответственно условиям (XXI.15) и (XXI.19).

Из формул (XXI.23) следует:

$$\frac{z_1'}{z_2} - \frac{z_2'}{z_2} = \frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_1'}{y_2},$$

или

$$\frac{z_1'z_2 - z_2'z_1}{z_1z_2} = \frac{y_1'y_2 - y_2'y_1}{y_1y_2} = \frac{1}{py_1z_2} = \frac{1}{py_2z_1},$$

откуда имеем:

$$y_1 = \frac{z_1}{p(z_1'z_2 - z_2'z_1)}, \quad y_2 = \frac{z_2}{p(z_1'z_2 - z_2'z_1)}.$$

Полезно ещё заметить формулу

$$y_1 z_2 = z_1 y_2,$$

а также

$$y_1' z_2 - y_2' z_1 = z_1' y_2 - y_1 z_2' = \frac{1}{p},$$

проверяемые непосредственно.

Следствие. Если уравнение (XXI.14) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям (XXI.15) и (XXI.19), то уравнение (XXI.17) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям (XXI.18) и (XXI.21), и наоборот.

При дальнейшем исследовании нам важно будет различать *два случая*:

1. Уравнение (XXI.14) не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих условиям (XXI.15) и (XXI.19).

2. Уравнение (XXI.14) имеет такое решение.

Мы докажем, что в первом случае уравнение (XXI.1) всегда имеет определённое единственное решение, удовлетворяющее условиям (XXI.13). *Во втором случае это будет не так.*

Пусть y_1 есть решение однородной задачи. Нетрудно видеть, что такое решение может быть только одно. Действительно, если y_1 и y_2 — два линейно независимых решения уравнения (XXI.14), то их определитель Вронского не равен нулю; следовательно, отношения

$$\frac{y_1'}{y_1} \quad \text{и} \quad \frac{y_2'}{y_2},$$

наверное, не равны между собой, и поэтому ни y_2 и никакая линейная комбинация

$$C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где $C_2 \neq 0$, не удовлетворяют условиям на границе. По следствию из леммы 1 (XXI)

$$z_1 = \frac{y_1}{p} e^{\int\limits_c^x \frac{q}{p} dx}$$

есть единственное решение сопряжённой задачи. Докажем для разбираемого второго случая теорему.

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (XXI.1) имело решение, удовлетворяющее (XXI.13), необходимо соблюдение условия

$$a_0 z_1 \Big|_{x=0} + \int\limits_0^1 f(x) z_1 \, dx - a_1 z_1 \Big|_{x=1} = 0. \tag{XXI.24}$$

Пусть функция $y_1(x)$ — нетривиальное решение однородной задачи, т. е. удовлетворяет уравнению (XXI.14) и условиям (XXI.15) и (XXI.19); тогда функция $z_1(x)$, определяемая по формуле (XXI.16), будет удовлетворять сопряжённому уравнению и сопряжённым краевым условиям (XXI.18) и (XXI.21).

Применяя формулу (XXI.7) к функции $y(x)$, являющейся решением (XXI.1) при условиях (XXI.13), и $z_1(x)$, мы непосредственно получим (XXI.24).

§ 4. Функция влияния.

Займёмся подробным разбором первого случая.

Пусть x_0 — произвольная точка промежутка $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, и пусть функция z_ε удовлетворяет уравнению

$$Mz_\varepsilon = \begin{cases} 0 \text{ при } |x - x_0| > \varepsilon, \\ \frac{1}{2\varepsilon} \text{ при } |x - x_0| \leqslant \varepsilon; \end{cases}$$

тогда

$$\int_0^1 yMz_\varepsilon\, dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} y\, dx.$$

Переходя в этой формуле к пределу при $\varepsilon \to 0$ и пользуясь теоремой о среднем, будем иметь:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 yMz_\varepsilon\, dx = y(x_0).$$

Если z_ε и y принадлежат сопряжённым семействам, т. е. удовлетворяют условиям: (XXI.15), (XXI.19), (XXI.18) и (XXI.21), то формула (XXI.8) даст:

$$y(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 yMz_\varepsilon\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 z_\varepsilon Ly\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 z_\varepsilon f(x)\, dx.$$

При тех же z_ε и функции y, удовлетворяющей общим условиям (XXI.14), из формулы (XXI.3) получим:

$$y(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[z_\varepsilon(0)\, a_0 + \int_0^1 z_\varepsilon f(x)\, dx - z_\varepsilon(1)\, a_1 \right].$$

Если бы при этом оказалось, что функция z_ε при $\varepsilon \to 0$ равномерно стремится к предельной функции

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z_\varepsilon = G(x, x_0),$$

зависящей, конечно, от параметра x_0, то в формулах, выражающих $y(x_0)$, можно было бы перейти к пределу. Условимся называть функцию $G(x, x_0)$ функцией Грина для оператора L.

С помощью функции Грина решение уравнения (XXI.1), удовлетворяющее (XXI.13), представлялось бы в виде

$$y(x_0)=G(0, x_0)\,a_0+\int_0^1 G(x, x_0)\,f(x)\,dx-G(1, x_0)\,a_1. \quad \text{(XXI.25)}$$

Если $a_0=a_1=0$, то мы имели бы

$$y(x_0)=\int_0^1 G(x, x_0)\,f(x)\,dx. \quad \text{(XXI.26)}$$

Не вычисляя z_ε, можно выяснить непосредственно, какой должна быть функция Грина, и даже построить её. Интегрируя Mz_ε в промежутке $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, где $\delta>\varepsilon$, получим:

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} Mz_\varepsilon\,dx=1.$$

С другой стороны,

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} Mz_\varepsilon\,dx=(pz_\varepsilon)'\Big|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}-\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[(qz_\varepsilon)'-rz_\varepsilon]\,dx,$$

откуда

$$1=(pz_\varepsilon)'\Big|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}-\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[(qz_\varepsilon)'-rz_\varepsilon]\,dx.$$

Предполагая z_ε и z_ε' равномерно ограниченными $|z_\varepsilon|\leqslant K$, $|z_\varepsilon'|\leqslant K$, вычитая из обеих частей равенства $p(x_0)\,z_\varepsilon'\Big|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}$ и производя оценку, получим:

$$\left|1-p(x_0)\,z_\varepsilon'\Big|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\right|\leqslant K\{|p(x_0+\delta)-p(x_0)|+|p(x_0)-p(x_0-\delta)|\}+$$
$$+K|p'(x_0+\delta)-p'(x_0-\delta)|+2K_1\delta,$$

где K_1 — постоянная, такая, что

$$|(qz_\varepsilon)'-(rz_\varepsilon)|\leqslant K_1.$$

Выберем δ столь малым, чтобы $2\delta K_1$ было меньше, чем η, где η — любое наперёд заданное положительное число, и чтобы выражение

$$|p(x_0+\delta)-p(x_0)|+|p(x_0)-p(x_0-\delta)|.$$

было меньше, чем $\frac{\eta}{K}$, а также, чтобы

$$|p'(x_0+\delta)-p'(x_0-\delta)|<\frac{\eta}{K},$$

получим

$$\left|1-p(x_0)\,z_\varepsilon'\Big|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\right|<3\eta.$$

Переходя к пределу сначала по ε, а затем по δ, получим

$$1-p(x_0)\,G_x'(x,x_0)\Big|_{x_0-0}^{x_0+0}=0$$

или

$$G_x'(x_0+0,x_0)-G_x'(x_0-0,x_0)=\frac{1}{p(x_0)}.$$

§ 5. Функция Грина и её построение.

Наводящие соображения, которыми мы воспользовались, не дают, конечно, доказательства справедливости наших рассуждений. Однако, исходя из последней формулы, мы можем строго обосновать их.

Определение. Назовём функцией Грина для оператора Ly и краевых условий (XXI.14) или (XXI.13) функцию $G(x, x_0)$, удовлетворяющую условиям:

1. Как функция переменного x при любом x_0 она удовлетворяет условиям, сопряжённым с нашими условиями для оператора Ly, т. е.

$$p(0)\,G_x'(0,x_0)+(p'(0)-q(0)+\alpha)\,G(0,x_0)=0,$$
$$p(1)\,G_x'(1,x_0)+(p'(1)-q(1)+\beta)\,G(1,x_0)=0.$$

2. В промежутках

$$0\leqslant x<x_0,\quad x_0<x\leqslant 1$$

функция $G(x, x_0)$ непрерывна вместе с производными до второго порядка и удовлетворяет уравнению, сопряжённому с уравнением $Ly=0$, т. е.

$$Mz=\frac{d^2(p(x)z)}{dx^2}-\frac{d(q(x)z)}{dx}+r(x)z=0.$$

3. В точке $x=x_0$ функция $G(x, x_0)$ как функция x сама непрерывна, а её производная разрывна, причём

$$G_x'(x_0+0,x_0)-G_x'(x_0-0,x_0)=\frac{1}{p(x_0)}. \qquad \text{(XXI.27)}$$

Функцию Грина, введённую нами, нетрудно построить фактически.

Пусть z_1 — решение уравнения $Mz=0$, удовлетворяющее условию (XXI.18), а z_2 — решение того же уравнения, удовлетворяющее условию (XXI.21). Эти решения независимы, так как иначе существовало бы нетривиальное решение уравнения $Mz=0$ и, следовательно, уравнения $Ly=0$, и мы имели бы второй случай. Очевидно, что

$$G(x, x_0)=a(x_0)z_1(x), \quad 0 \leqslant x < x_0;$$
$$G(x, x_0)=b(x_0)z_2(x); \quad x_0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Из того факта, что $G(x, x_0)$ — непрерывная функция, а первая её производная терпит разрыв непрерывности при $x=x_0$, удовлетворяющий (XXI.25), получим:

$$a(x_0)z_1(x_0)-b(x_0)z_2(x_0)=0,$$
$$a(x_0)z_1'(x_0)-b(x_0)z_2'(x_0)=-\frac{1}{p(x_0)},$$

откуда получаем:

$$a(x_0)=\frac{-z_2(x_0)}{p(x_0)\left[z_2(x_0)z_1'(x_0)-z_2'(x_0)z_1(x_0)\right]},$$
$$b(x_0)=\frac{-z_1(x_0)}{p(x_0)\left[z_2(x_0)z_1'(x_0)-z_2'(x_0)z_1(x_0)\right]}.$$

Стоящий в знаменателе определитель Вронского не равен нулю, так как $z_1(x)$ и $z_2(x)$ линейно независимы.

Отсюда по лемме (XXI.1)

$$a(x_0)=y_2(x_0); \quad b(x_0)=y_1(x_0),$$

где $y_1(x_0)$ и $y_2(x_0)$ суть некоторые решения уравнения $Ly=0$, удовлетворяющие соответственно условиям (XXI.15) и (XXI.19).

Таким образом,

$$G(x, x_0)=\left\{\begin{array}{ll} y_2(x_0)z_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ y_1(x_0)z_2(x), & x_0 \leqslant x \leqslant 1. \end{array}\right\} \qquad \text{(XXI.28)}$$

Формула (XXI.28) не только даёт функцию Грина в явном виде, но позволяет ещё исследовать некоторые её свойства.

Лемма 2. Функция Грина непрерывна в квадрате

$$0 \leqslant x \leqslant 1; \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant 1$$

на плоскости xOx_0.

Лемма 3. Первые производные от функции Грина непрерывны везде, кроме главной диагонали $x=x_0$, где

$$G_x'(x_0+0, x_0)-G_x'(x_0-0, x_0)=\frac{1}{p(x_0)}.$$

Лемма 4. Имеет место формула

$$G_{x_0}'(x_0, x_0+0)-G_{x_0}'(x_0, x_0-0)=\frac{1}{p(x_0)}.$$

В самом деле, $G(x, x)$ — дифференцируемая функция,

$$\frac{dG(x, x)}{dx} = y_1'(x)\, z_2(x) + z_2'(x)\, y_1(x) = y_2'(x)\, z_1(x) + y_2(x)\, z_1'(x),$$

и, следовательно, выражение

$$\frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x} + \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial x_0} = \begin{cases} y_2(x_0)\, z_1'(x) + y_2'(x_0)\, z_1(x); & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ y_1(x_0)\, z_2'(x) + y_1'(x_0)\, z_2(x); & x_0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

с обеих сторон главной диагонали оказывается имеющим одинаковый предел.

Пользуясь этим и замечая также, что

$$G'_{x_0}(x_0 + 0, x_0) = G'_{x_0}(x_0, x_0 - 0),$$
$$G'_{x_0}(x_0 - 0, x_0) = G'_{x_0}(x_0, x_0 + 0),$$

мы видим, что

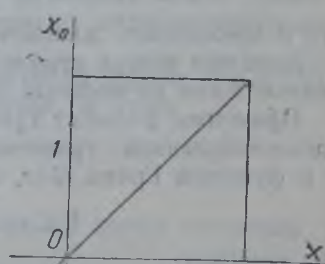
$$G'_x(x_0 + 0, x_0) - G'_x(x_0 - 0, x_0) = G'_{x_0}(x_0, x_0 + 0) - G'_{x_0}(x_0, x_0 - 0),$$

и, следовательно, в силу (XXI.27)

$$G'_{x_0}(x_0, x_0 + 0) - G'_{x_0}(x_0, x_0 - 0) = \frac{1}{p(x_0)}.$$

Отсюда сразу вытекает и следующее важное свойство функции Грина.

Теорема 2. Функция Грина $G(x, x_0)$ как функция аргумента x_0 служит функцией Грина для оператора Mz при условиях (XXI.18) и (XXI.21), т. е. при замене задачи на сопряжённую аргументы функции Грина лишь меняются местами.



Черт. 14.

Для доказательства этой теоремы мы могли бы использовать и другой приём.

Пусть $G^*(x, x_1)$ есть функция Грина для оператора Mz с краевыми условиями (XXI.18) и (XXI.21).

Эта функция как функция точки x имеет разрыв первой производной в точке $x = x_1$. Для определённости положим $x_0 > x_1$ и применим формулу Грина (XXI.3) для функций $G^*(x, x_1)$ и $G(x, x_0)$ порознь для промежутков

$$0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_0 \quad \text{и} \quad x_0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Интегралы:

$$\int_0^{x_1} [G(x, x_0) LG^*(x, x_1) - G^*(x, x_1) MG(x, x_0)]\,dx,$$

$$\int_{x_1}^{x_0} [G(x, x_0) LG^*(x, x_1) - G^*(x, x_1) MG(x, x_0)]\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{1} [G(x, x_0) LG^*(x, x_1) - G^*(x, x_1) MG(x, x_0)]\,dx,$$

равны, очевидно, нулю.

Отсюда

$$[pG^{*\prime}G - pG'G^* + (q - p')GG^*]_{x=x_1-0} = 0,$$
$$[pG^{*\prime}G - pG'G^* + (q - p')GG^*]_{x=x_0-0} - [pG^{*\prime}G - pG'G^* + (q - p')GG^*]_{x=x_1+0} = 0,$$
$$-[pG^{*\prime}G - pG'G^* + (q - p')GG^*]_{x=x_0+0} = 0.$$

Складывая эти три равенства и пользуясь тем, что G и G^* непрерывны в точках x_1 и x_0, G' непрерывна в x_1, а $G^{*\prime}$ непрерывна в x_0, получим:

$$-[pG]_{x_1}[G^{*\prime}]_{x_1-0}^{x_1+0} + [pG^*]_{x_0}[G']_{x_0-0}^{x_0+0} = 0,$$

или, пользуясь тем, что скачок производных G' и $G^{*\prime}$ равен $\frac{1}{p}$, получим:

$$-G(x_1, x_0) + G^*(x_0, x_1) = 0, \qquad \text{(XXI.29)}$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь строго формулы (XXI.25) и (XXI.26), выведенные нами из косвенных соображений.

Применим формулу Грина (XXI.3) к неизвестной функции y, удовлетворяющей уравнению (XXI.1) и условиям (XXI.13), и к функции Грина $G(x, x_0)$ в промежутках

$$0 \leqslant x \leqslant x_0 \quad \text{и} \quad x_0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Мы получим:

$$\int_0^{x_0} Gf\,dx = [-pG'_x y + py'G + (q - p')yG]_{x_0-0} - a_0 G(0, x_0),$$

$$\int_{x_0}^{1} Gf\,dx = a_1 G(1, x_0) - [-pG'_x y + py'G + (q - p')yG]_{x_0+0}.$$

Складывая эти равенства и пользуясь тем, что y непрерывна со своей производной в точке x_0, а G'_x имеет скачок, равный $\frac{1}{p(x_0)}$, получим:

$$\int_0^1 Gf\,dx = a_1 G(1, x_0) - a_0 G(0, x_0) + [py]_{x_0} [G'_x]_{x_0-0}^{x_0+0} =$$

$$= a_1 G(1, x_0) - a_0 G(0, x_0) + y(x_0);$$

тем самым наши формулы получены.

Нам остаётся проверить, что формулы (XXI.25) или (XXI.26) действительно дают решение поставленной задачи. Достаточно при этом проверить формулу (XXI.26), так как задача об отыскании решения (XXI.1) с условиями (XXI.13) всегда может быть сведена к задаче с однородными условиями (XXI.13′).

Если эта последняя имеет решение, то и первоначальная задача имеет решение. Нами доказано, однако, что если решение задачи существует, то оно представимо в виде (XXI.26).

Итак, достаточно установить, что функция

$$y(x_0) = \int_0^1 G(x, x_0) f(x)\,dx$$

удовлетворяет уравнению (XXI.1) и условиям (XXI.13′).

Дифференцирование по обычным правилам показывает, что если $f(x)$ непрерывна, то функция $y(x_0)$, определяемая уравнением (XXI.26), есть дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть теперь z — произвольная функция на отрезке $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, имеющая непрерывные вторые производные, и пусть

$$Mz = \rho.$$

В силу свойств функции Грина $G^*(x, x_0)$ имеем тождество

$$z(x_0) = \{(pz)' - (q - \alpha) z\}_{x=0} G^*(0, x_0) + \int_0^1 \rho(x) G^*(x, x_0)\,dx -$$
$$- \{(pz)' - (q - \beta) z\}_{x=1} G^*(1, x_0). \qquad \text{(XXI.30)}$$

Умножая обе части (XXI.30) на $f(x_0)$ и интегрируя по x_0 в пределах от 0 до 1, получим, меняя название x и x_0 и пользуясь (XXI.29):

$$\int_0^1 z(x) f(x)\, dx = [(pz)' - (q-\alpha) z]_{x=0} \int_0^1 G(x, 0) f(x)\, dx +$$

$$+ \int_0^1 \rho(x) \left(\int_0^1 G(x_1, x) f(x_1)\, dx_1 \right) dx -$$

$$- [(pz)' - (q-\beta) z]_{x=1} \int_0^1 G(x, 1) f(x)\, dx$$

или

$$\int_0^1 z(x) f(x)\, dx = [(pz)' - (q-\alpha) z]_{x=0}\, y(0) +$$

$$+ \int_0^1 \rho(x) y(x)\, dx - [(pz)' - (q-\beta) z]_{x=1}\, y(1).$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 \rho(x) y(x)\, dx = \int_0^1 yMz\, dx = [py' + \alpha y]_{x=0}\, z(0) -$$

$$- [(pz)' - (q-\alpha) z]_{x=0}\, y(0) + \int_0^1 zLy\, dx - [py' + \beta y]_{x=1}\, z(1) +$$

$$+ [(pz)' - (q-\beta) z]_{x=1}\, y(1),$$

откуда имеем тождество:

$$\int_0^1 z(x) f(x)\, dx = \int_0^1 z(x)\, Ly\, dx + z(0)\, [py' + \alpha y]_{x=0} -$$

$$- z(1)\, [py' + \beta y]_{x=1},$$

справедливое при совершенно произвольной функции $z(x)$. Отсюда немедленно следует, что

$$[py' + \alpha y]_{x=0} = 0; \quad [py' + \beta y]_{x=1} = 0$$

и

$$Ly = f(x). \tag{XXI.31}$$

что и требовалось доказать.

Нами изучена задача в первом случае. Мы установили, что при этом всегда существует определённое решение уравнения (XXI.1), удовлетворяющее условиям (XXI.13) или (XXI.13′) и представимое в виде (XXI.25) или (XXI.26), где $G(x, x_0)$ — определённая нами функция Грина.

§ 6. Обобщённая функция Грина для линейного уравнения 2-го порядка.

Разберём более подробно *второй* случай.

Лемма 5. Если $y_0(x)$ и $z_0(x)$ являются решениями уравнений $Ly=0$ и $Mz=0$, соответственно удовлетворяющими однородным условиям (XXI.15), (XXI.19) и (XXI.18), (XXI.21), то

$$\int_0^1 y_0(x) z_0(x)\, dx \neq 0. \tag{XXI.32}$$

Это замечание вытекает из того, что

$$\int_0^1 y_0(x) z_0(x)\, dx = c \int_0^1 \frac{y_0^2}{p} e^{\int\limits_c^x -\frac{q}{p}\, dx} dx.$$

Так как подинтегральное выражение постоянно по знаку, то интеграл не может равняться нулю.

Лемма 6. Уравнение

$$Mz = z_0$$

не может иметь решения, удовлетворяющего одновременно (XXI.18) и (XXI.21).

В самом деле, если бы это было так, то, применяя формулу (XXI.7) и подставляя в неё вместо y решение y_0, мы получили бы:

$$\int_0^1 y_0 Mz\, dz = \int_0^1 z_0 y_0\, dx = 0,$$

что противоречит лемме 5 (XXI).

Определение. Рассмотрим теперь вместо функции Грина новую функцию $G_1(x, x_0)$, определённую условиями:

1. Как функция переменного x при любом x_0 функция $G_1(x, x_0)$ удовлетворяет условиям:

$$\left.\begin{aligned} p(0)\frac{\partial G_1(0, x_0)}{\partial x} + (p'(0) - q(0) + \alpha)\, G_1(0, x_0) = 0, \\ p(1)\frac{\partial G_1(1, x_0)}{\partial x} + (p'(1) - q(1) + \beta)\, G_1(1, x_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{XXI.33}$$

2. В промежутках

$$0 \leqslant x < x_0, \quad x_0 < x \leqslant 1$$

функция $G_1(x, x_0)$ есть непрерывная с производными до 2-го порядка функция, удовлетворяющая уравнению:

$$MG_1(x, x_0) = a(x_0)\, z_0(x); \tag{XXI.34}$$

функцию $a(x_0)$ мы определим позднее.

3. В точке $x = x_0$ функция $G_1(x, x_0)$ как функция x сама непрерывна, а производные её разрывны, причём

$$\frac{\partial G_1(x_0+0, x_0)}{\partial x} - \frac{\partial G_1(x_0-0, x_0)}{\partial x} = \frac{1}{p(x_0)}. \tag{XXI.35}$$

4. $$\int\limits_0^1 G_1(x, x_0)\, y_0(x)\, dx = 0. \tag{XXI.36}$$

Эту функцию мы назовём *обобщённой функцией Грина*. Условие (XXI.35) позволяет определить множитель $a(x_0)$.

Обозначим через $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ частные решения уравнения

$$Ly = y_0, \tag{XXI.37}$$

удовлетворяющие условиям:

$$y^{(1)}|_{x=0} = y^{(1)\prime}|_{x=0} = 0,$$
$$y^{(2)}|_{x=1} = y^{(2)\prime}|_{x=1} = 0,$$

и аналогично $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ — частные решения уравнения

$$Mz = z_0, \tag{XXI.38}$$

удовлетворяющие условиям:

$$z^{(1)}|_{x=0} = z^{(1)\prime}|_{x=0} = 0,$$
$$z^{(2)}|_{x=1} = z^{(2)\prime}|_{x=1} = 0.$$

Очевидно, что разность $y^{(2)} - y^{(1)} = y_1$ есть частное решение уравнения (XXI.14), линейно независимое с y_0. В самом деле, если бы $y^{(2)} - y^{(1)} = \alpha y_0$, то обе функции $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ должны были бы удовлетворять на концах условиям (XXI.15) и (XXI.19), что невозможно. Задание y_0 определяет, очевидно, функции $y^{(2)}$, $y^{(1)}$ и y_1. Положим

$$z_0 = \frac{y_0}{p(y_0' y_1 - y_1' y_0)}, \quad z_1 = \frac{y_1}{p(y_0' y_1 - y_1' y_0)}.$$

Непосредственно проверяется, что функции $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ могут быть выражены в виде

$$y^{(1)}(x_0)=y_0(x_0)\int\limits_0^{x_0} y_0(x)\,z_1(x)\,dx-y_1(x_0)\int\limits_0^{x_0} y_0(x)\,z_0(x)\,dx,$$

$$y^{(2)}(x_0)=y_0(x_0)\int\limits_1^{x_0} y_0(x)\,z_1(x)\,dx-y_1(x_0)\int\limits_1^{x_0} y_0(x)\,z_0(x)\,dx.$$

В самом деле, равенства $y^{(1)}(0)=y^{(2)}(1)=0$ очевидны. Далее

$$y^{(1)\prime}(0)=[y_0(0)]^2 z_1(0)-y_1(0)\,y_0(0)\,z_0(0)=0,$$
$$y^{(2)\prime}(1)=[y_0(1)]^2 z_1(1)-y_1(1)\,y_0(1)\,z_0(1)=0.$$

Кроме того,

$$y^{(1)\prime}=y_0'(x_0)\int\limits_0^{x_0} y_0(x)\,z_1(x)\,dx-y_1'(x_0)\int\limits_0^{x_0} y_0(x)\,z_0(x)\,dx,$$

$$y^{(1)\prime\prime}=y_0''(x_0)\int\limits_0^{x_0} y_0(x)\,z_1(x)\,dx-y_1''(x_0)\int\limits_0^{x_0} y_0(x)\,z_0(x)\,dx+$$
$$+[y_0'(x_0)\,z_1(x_0)-y_1'(x_0)\,z_0(x_0)]\,y_0(x),$$

откуда

$$Ly^{(1)}=y_0(x),$$

что и требовалось доказать.

Так же доказывается и формула для $y^{(2)}$. Составляя разность

$$y^{(2)}(x_0)-y^{(1)}(x_0)=y_1(x_0)=$$
$$=-y_0(x_0)\int\limits_0^1 y_0(x)\,z_1(x)\,dx+y_1(x_0)\int\limits_0^1 y_0(x)\,z_0(x)\,dx,$$

видим, что

$$\int\limits_0^1 y_0(x)\,z_1(x)\,dx=0,$$

$$\int\limits_0^1 y_0(x)\,z_0(x)\,dx=1,$$

т. е.

$$\int_0^1 y_0(x)\, z^{(1)}(x)\, dx = \int_0^1 y_0(x)\, z^{(2)}(x)\, dx = C.$$

Функция G_1 допускает в этом случае представление:

$$G_1 = \begin{cases} y_0(x_0)\, z^{(1)}(x) + y^{(2)}(x_0)\, z_0(x) - C y_0(x_0)\, z_0(x), & x \leqslant x_0, \\ y_0(x_0)\, z^{(2)}(x) + y^{(1)}(x_0)\, z_0(x) - C y_0(x_0)\, z_0(x), & x \geqslant x_0. \end{cases}$$

Все четыре сформулированных выше свойства могут быть проверены непосредственно.

1. Удовлетворение условиям (XXI.33) очевидно, так как этим условиям удовлетворяет $z_0(x)$, а также соответственно $z^{(1)}$ при $x=0$ и $z^{(2)}$ при $x=1$.

2. Уравнение (XXI.34) удовлетворяется в силу (XXI.38). Очевидно,

$$MG_1 = y_0(x_0)\, z_0(x).$$

3. Непрерывность G_1 очевидна. Для скачка её производных имеем:

$$G'_{1x}(x_0+0, x_0) - G'_{1x}(x_0-0, x_0) = y_0(x_0)\,[z^{(2)\prime}(x_0) - z^{(2)\prime}(x_0)] +$$
$$+ [y^{(1)}(x_0) - y^{(2)}(x_0)]\, z'_0(x_0) = y_0(x_0)\, z'_1(x_0) - y_1(x_0)\, z'_0(x_0) = \frac{1}{p(x_0)}.$$

Наконец,

$$4.\ \int_0^1 G_1(x, x_0)\, y_0(x)\, dx = -C y_0(x_0) + y_0(x_0) \int_0^1 y_0(x)\, z^{(2)}(x)\, dx +$$
$$+ y_0(x_0) \int_0^{x_0} [z^{(1)}(x) - z^{(2)}(x)]\, y_0(x)\, dx +$$
$$+ [y^{(2)}(x_0) - y^{(1)}(x_0)] \int_0^{x_0} z_0(x)\, y_0(x)\, dx +$$
$$+ y^{(1)}(x_0) \int_0^1 y_0(x)\, z_0(x)\, dx = -C y_0(x_0) + C y_0(x_0) +$$
$$+ y^{(1)}(x_0) - y^{(1)}(x_0) = 0.$$

Очевидно, что обобщённая функция Грина $G_1(x, x_0)$ как функция от переменного x_0 служит в свою очередь обобщённой функцией Грина для сопряжённого оператора Mz и граничных условий (XXI.18) и (XXI.21).

С её помощью можно представить решение уравнения (XXI.1), удовлетворяющее условиям (XXI.13′), в виде

$$y(x_0) = \int_0^1 G_1(x, x_0) f(x)\, dx + C_1 y_0(x_0), \tag{XXI.39}$$

если только $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 f(x) z_0(x)\, dx = 0. \tag{XXI.40}$$

Из доказательства, между прочим, вытекает, что условие (XXI.40) не только необходимо, но и достаточно для разрешимости уравнения (XXI.1) при условии (XXI.13′).

Доказательство всех этих утверждений мы проводить не будем, так как оно совершенно совпадает с тем, которое было нами проведено для самой функции Грина.

Для уравнения 2-го порядка при рассмотренных условиях однородная задача могла иметь лишь одно нетривиальное решение.

Может встретиться случай, когда соответствующая однородная задача имеет несколько линейно независимых решений $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Тогда обобщённая функция Грина должна соответственно удовлетворять уравнению

$$MG = \sum_{i=1} y_i(x_0) z_i(x),$$

и вместо одного условия (XXI.36) мы будем иметь несколько подобных условий. Подробный разбор этих случаев мы проводить не будем.

Переходим к рассмотрению некоторых примеров.

§ 7. Примеры.

Пример 1. Ищем решение уравнения

$$Ly = y'' = f(x) \tag{XXI.41}$$

при условиях

$$\begin{aligned} y|_{x=0} &= a_0, \\ y|_{x=1} &= a_1. \end{aligned} \tag{XXI.42}$$

Единственное решение уравнения $y'' = 0$ при условии $y|_{x=0} = y|_{x=1} = 0$ есть нуль.

Согласно общей теории, изложенной выше для задачи, существует функция Грина

$$G_x = \begin{cases} x(x_0 - 1), & x \leqslant x_0. \\ x_0(x - 1), & x \geqslant x_0. \end{cases} \qquad \text{(XXI.43)}$$

Решение задачи будет:

$$y(x_0) = a_0(1 - x_0) + a_1 x_0 + \\ + (x_0 - 1)\int_0^{x_0} f(x)\,x\,dx + x_0\int_{x_0}^{1} f(x)(x - 1)\,dx. \qquad \text{(XXI.44)}$$

Пример 2. Ищем решение (XXI.41) при условиях

$$y'|_{x=0} = a_0, \quad y'|_{x=1} = a_1. \qquad \text{(XXI.45)}$$

В этом случае уравнение $y'' = 0$ имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$y'|_{x=0} = y'|_{x=1} = 0, \qquad \text{(XXI.46)}$$

а именно,

$$y = 1.$$

Следовательно, функция Грина в этом случае не существует, и нам нужно будет построить обобщённую функцию Грина. Мы имеем:

$$y_0 = 1, \quad z_0 = 1,$$

$$y_1 = x, \quad z_1 = x.$$

Далее,

$$z^{(1)} = \frac{1}{2}x^2, \quad z^{(2)} = \frac{1}{2}(1 - x)^2.$$

Тогда

$$y^{(1)} = \frac{1}{2}x^2, \quad y^{(2)} = \frac{1}{2}(1 - x)^2, \quad C = \frac{1}{6}.$$

Функция G_1 будет при этом иметь вид:

$$G_1 = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(1 - x_0)^2 - \frac{1}{6}, & x_0 \geqslant x, \\ \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}(1 - x)^2 - \frac{1}{6}, & x \geqslant x_0. \end{array} \right\} \qquad \text{(XXI.47)}$$

Пример 3. Рассмотрим то же уравнение (XXI.41) в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и будем считать x длиной дуги окружности единичного радиуса, отсчитанной от некоторой начальной точки.

При этом, очевидно, искомая функция y должна быть периодической функцией с периодом 2π.

Мы получим для неё условия:

$$y|_{x=2\pi} = y|_{x=0} \quad y'|_{x=2\pi} = y'|_{x=0}. \qquad \text{(XXI.48)}$$

Эти условия выражают собою то обстоятельство, что функция y непрерывна со своей первой производной на окружности. Тот факт, что точка $x=0$ играет в этих условиях особую роль, связан лишь с выбором начала отсчёта.

Теория такого рода задач не была нами развита в общем виде, но, ввиду её полного сходства с уже изложенной, мы ограничимся разбором этого примера.

Нетрудно убедиться, что однородное уравнение

$$y''=0$$

имеет, как и в предыдущей задаче, нетривиальное решение $y=1$, удовлетворяющее условиям (XXI.48). Следовательно, мы должны будем построить обобщённую функцию Грина.

Построение это выполняется проще всего, если воспользоваться периодичностью искомой функции, а также тем, что все точки нашей окружности эквивалентны одна другой.

Мы можем поэтому положить сначала $x_0=\pi$.

Функция Грина при этом будет иметь вид

$$G_1(x, \pi)=c_1x^2+c_2x+c_3, \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

(очевидно, что это будет квадратичный трёхчлен в силу условия $y''=\text{const.}$).

Из условия непрерывности имеем:

$$G_1(\pi-0, \pi)-G_1(\pi+0, \pi)=G_1(\pi, \pi)-G_1(-\pi, \pi)=2\pi c_2,$$

откуда

$$c_2=0.$$

Далее,

$$G_1'(\pi+0, \pi)-G_1'(\pi-0, \pi)=-4\pi c_1=1,$$

откуда

$$c_1=-\frac{1}{4\pi}.$$

Кроме того,

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}x^2\,dx+2\pi c_3=0,$$

или

$$c_3=\frac{\pi}{12}.$$

Окончательно имеем:

$$G_1(x, \pi)=-\frac{1}{4\pi}x^2+\frac{\pi}{12}, \quad -\pi<x<+\pi.$$

В силу периодичности $G_1(x, \pi) = G_1(x, (2k+1)\pi)$ и в общем случае:

$$G_1(x, x_0) = \left\{ \begin{array}{c} G_1(x - x_0 + \pi, \pi) = -\frac{1}{4\pi}(x - x_0 + \pi)^2 + \frac{\pi}{12} \\ \text{при } x_0 - 2\pi \leqslant x \leqslant x_0, \\ G_1(x - x_0 - \pi, -\pi) = -\frac{1}{4\pi}(x - x_0 - \pi)^2 + \frac{\pi}{12} \\ \text{при } x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + 2\pi. \end{array} \right\} \tag{XXI.49}$$

Построенная нами функция Грина симметрична относительно x и x_0 и обладает всеми теми свойствами, которые были установлены выше для обобщённой функции Грина.

В практических задачах приходится сталкиваться со случаями, когда в уравнении (XXI.1) $p(0) = 0$ или $p(1) = 0$, а иногда оба конца промежутка служат корнями функции $p(x)$. При этих условиях мы можем всё же строить функцию Грина, сделав, однако, некоторые добавочные ограничения.

Не развивая здесь общей теории, мы ограничимся разбором одного примера, который будет полезен нам в дальнейшем.

Рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv xy'' + y' - \frac{m^2}{x} y = f(x) \tag{XXI.50}$$

и будем искать решение этой задачи, удовлетворяющее условию

$$y|_{x=1} = 0. \tag{XXI.51}$$

Интегралы однородного уравнения

$$L_y = 0$$

суть, как нетрудно видеть,

$$y_1 = x^m, \quad y_2 = x^{-m}.$$

Один из них не ограничен в начале промежутка. Поэтому для того чтобы одна из постоянных, входящих в общее решение, была определена полностью, достаточно положить:

$$|y| < \frac{1}{x^{m-1}}.$$

Другая постоянная определится условием (XXI.51). Сопряжённый оператор в данном случае совпадает с исходным .

$$Lz = Mz.$$

Естественно заменить в определении функции Грина условие при $x=0$ требованием ограниченности. При этом функция Грина для нашей задачи представляется в виде

$$G(x, x_0)=\begin{cases} \frac{1}{2m} x^m (x_0^m - x_0^{-m}), & x < x_0 \\ \frac{1}{2m} x_0^m (x^m - x^{-m}), & x \geqslant x_0. \end{cases} \quad \text{(XXI.52)}$$

Допустим, что $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| < \frac{A}{x^k}, \quad k \leqslant m.$$

Применяя формулу (XXI.26) к искомому решению, будем иметь:

$$y(x_0)=\frac{x_0^m - x_0^{-m}}{2m}\int_0^{x_0} x^m f(x)\,dx + \frac{x_0^m}{2m}\int_{x_0}^1 (x^m - x^{-m}) f(x)\,dx.$$

Это решение нетрудно оценить:

$$|y(x_0)| \leqslant \frac{x_0^{-m}}{2m}\int_0^{x_0} x^{m-k} A\,dx + \frac{x_0^m}{2m}\int_{x_0}^1 x^{-m-k} A\,dx + \frac{x_0^m}{2m}\int_0^1 A x^{m-k}\,dx <$$

$$< A\left(\frac{x_0^{-k+1}}{2m(m-k+1)} + \frac{x_0^{-k+1}}{2m(m+k-1)} + \frac{x_0^m}{2m(m-k+1)}\right),$$

или

$$|y(x_0)| < \frac{A_1}{x_0^{k-1}};$$

следовательно, решение будет удовлетворять поставленным условиям, что и требовалось доказать.

Если $m=0$, то решениями однородного уравнения будут

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \lg x.$$

При этом для ограниченных $f(x)$ можно искать ограниченное решение.

Для уравнений высшего порядка также возможно построение функции Грина.

Ограничимся опять одним примером.

Рассмотрим решение уравнения из примера 1 § 2 (XXI) при условиях (XXI.9).

Функция Грина $G(x, x_0)$ определится при этом формулами:

$$G(x, x_0) = 0, \quad x > x_0,$$
$$MG = 0, \quad x < x_0,$$

и удовлетворяет условиям:

$$G\big|_{x=x_0} = G'_x\big|_{x=x_0} = G''_{xx}\big|_{x=x_0} = \ldots = G^{(n-2)}_{xx\ldots x}\big|_{x=x_0} = 0,$$
$$G^{(n-1)}_{xx\ldots x}\big|_{x=x_0-0} = -\frac{1}{p_0(x_0)}.$$

С помощью этой функции Грина решение задачи получается в виде

$$y(x_0) = \int_0^1 G(x, x_0) f(x)\,dx.$$

Слушатели могут сами проверить это непосредственно. Функция Грина, определённая этими условиями, как и прежде, отличается лишь перестановкой аргументов от функции Грина для сопряжённой задачи.

ЛЕКЦИЯ XXII.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА.

§ 1. Функция Грина для задачи Дирихле.

Разобрав важнейшие случаи построения функции Грина для уравнений обыкновенных, мы перейдём к изучению функции Грина для различных задач, связанных с уравнением Пуассона.

Рассмотрим в пространстве с координатами x, y, z некоторую область Ω, ограниченную достаточно гладкой поверхностью S.

Будем искать функцию u, удовлетворяющую в этой области уравнению

$$\Delta u = f(P) \tag{XXII.1}$$

и одному из следующих условий:

$$u|_S = F_0(S), \tag{XXII.2}$$

или

$$\left.\frac{du}{dn}\right|_S = F_1(S). \tag{XXII.3}$$

Такая задача встречается, например, при отыскании потенциала электрического поля с заданным распределением зарядов. К такой задаче этого типа приводится вопрос о форме равновесия мембраны, при заданной поперечной силе и т. п.

Оператор Лапласа, как мы знаем, является самосопряжённым. То же самое относится и к условиям (XXII.2) или (XXII.3), как это ясно из классической формулы Грина:

$$\iiint_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,d\Omega = \iint_S \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) dS. \tag{XXII.4}$$

Рассуждения, которые мы будем проводить, можно без труда перенести и на случай более общих условий, но мы не будем затрагивать этого вопроса за неимением времени.

Определение. Назовём функцией Грина для уравнения (XXII.1) при условии (XXII.2) или функцией Грина для задачи

Дирихле функцию $G(P, P_0)$ двух переменных точек P и P_0, удовлетворяющую следующим условиям:

1. Функция $G(P, P_0)$ есть гармоническая функция точки P во всей области Ω, исключая точку P_0.

2. Функция $G(P, P_0)$ как функция точки P удовлетворяет условиям, сопряжённым с (XXII.2), т. е.

$$G(P, P_0)|_S = 0.$$

3. В окрестности точки P_0 функция $G(P, P_0)$ допускает представление

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r} + g(P, P_0),$$

где r есть расстояние между P и P_0, а $g(P, P_0)$ — регулярная гармоническая функция.

Функция $g(P, P_0)$ полностью аналогична построенной нами ранее для обыкновенного линейного уравнения.

Мы могли бы вместо аксиоматического определения этой функции определить её как функцию влияния, подобно предыдущему (см. § 2 XXI). Однако у нас нет возможности останавливаться на этом подробнее.

Установим существование функции Грина для задачи Дирихле. Очевидно,

$$G(P, P_0) - \frac{1}{4\pi r} = g(P, P_0)$$

есть гармоническая функция точки P во всей области Ω.

$$\Delta g = 0. \tag{XXII.5}$$

Её предельные значения на S будут

$$g(P, P_0)|_S = -\frac{1}{4\pi r}\Big|_S. \tag{XXII.6}$$

Функция $g(P, P_0)$ по условиям (XXII.5) и (XXII.6) строится при помощи решения соответствующей задачи Дирихле.

Если P_0 — внутренняя точка области, то $g(P, P_0)$ имеет достаточно гладкие предельные значения вместе со своими первыми производными, так как она представляется потенциалом двойного слоя с достаточно гладкой плотностью по достаточно гладкой поверхности.

Теорема 1. Решение уравнения (XXII.1) при условиях (XXII.2) (если оно существует) представляется в виде:

$$u(P_0) = \iint_S F_0(S) \frac{dG}{dn}\, dS - \iiint_\Omega G(P, P_0) f(P)\, dP. \tag{XXII.7}$$

Для доказательства применим формулу Грина к области Ω', полученной из Ω вырезыванием малого шара с поверхностью σ радиуса δ вокруг точки P_0. Мы получим:

$$\iiint\limits_{\Omega'} G(P, P_0)\Delta u\, dP = \iint\limits_{S'} \left(u\frac{dG}{dn} - G\frac{du}{dn}\right) dS,$$

где S' — полная поверхность Ω'. Принимая во внимание, что на S функция G обращается в нуль, получим:

$$\iiint\limits_{\Omega'} G(P, P_0) f(P)\, dP = \iint\limits_{S} F_0(S)\frac{dG}{dn} dS -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}\left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right) d\sigma - \iint\limits_{\sigma}\left(u\frac{dg}{dn} - g\frac{du}{dn}\right) d\sigma.$$

Знак минус перед последними слагаемыми поставлен потому, что интегрирование по σ взято в том же смысле, что и по S.

Предел последнего интеграла при $\delta \to 0$ есть нуль в силу ограниченности u и g и их производных.

Далее,

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma}\left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right) d\sigma =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{4\pi\delta^2}\iint\limits_{\sigma} u\, d\sigma - \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{4\pi\delta^2}\iint\limits_{\sigma} \delta\frac{du}{dn} d\sigma.$$

Предел первого слагаемого есть предел среднего значения u на сфере σ и равен $u(P_0)$. Предел второго слагаемого есть, очевидно, нуль. Пользуясь этим, сразу получим искомую формулу (XXII.7).

Теорема 2. Функция $G(P, P_0)$ — симметрическая функция своих аргументов.

Для доказательства применим формулу Грина к функциям $G(P, P_1)$ и $G(P, P_2)$ в области Ω'', полученной вырезыванием из Ω обеих точек P_1 и P_2 малыми шарами. Обозначая через S'' границу области Ω'', мы будем иметь:

$$\iint\limits_{S''}\left(G(P, P_1)\frac{dG(P, P_2)}{dn} - G(P, P_2)\frac{dG(P, P_1)}{dn}\right) dS'' = 0.$$

Интеграл по поверхности S равен нулю, так как там обращаются в нуль обе функции $G(P, P_1)$ и $G(P, P_2)$.

Предел интеграла по сфере вокруг P_1 будет, очевидно, равен $G(P_1, P_2)$, а предел интеграла по сфере вокруг P_2 равен $-G(P_2, P_1)$, откуда

$$G(P_1, P_2) = G(P_2, P_1),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Функция $u(P_0)$, определённая формулой (XXII.7), даёт решение поставленной задачи.

Доказательство мы проведём тем же методом, что и ранее. Нам достаточно установить существование решения у задачи с однородными условиями, ибо неоднородные условия (XXII.2) приводятся к однородным с помощью замены

$$u = v + \psi,$$

где ψ — любая, дважды дифференцируемая в Ω функция, удовлетворяющая данным неоднородным условиям на границе S, а v — новая неизвестная. Пусть $\xi(P)$ — произвольная функция, достаточно гладкая со своими производными, отличная от нуля только в некоторой части ω области Ω.

Если $\Delta\xi(P) = \rho(P)$, то по доказанной выше теореме 1 имеет место формула

$$\xi(P_0) = -\iiint_\Omega G(P, P_0)\,\rho(P)\,dP. \tag{XXII.8}$$

Умножая обе части (XXII.8) на функцию $f(P_0)$ и интегрируя по P_0, получим:

$$\iiint_\Omega \xi(P_0) f(P_0)\,dP = -\iiint_\Omega \iiint_\Omega G(P, P_0) f(P_0)\,\rho(P)\,dP_0\,dP =$$

$$= \iiint_\Omega \rho(P)\,u(P)\,dP, \tag{XXII.9}$$

где

$$u(P) = -\iiint_\Omega G(P, P_0) f(P_0)\,dP_0. \tag{XXII.10}$$

Пусть $u(P)$ имеет ограниченные вторые производные. (Это обстоятельство можно установить с помощью специального исследования, которое мы не проводим.)

Тогда, применяя формулу Грина ко второй части формулы (XXII.9) и пользуясь обращением в нуль ξ вместе с первыми производными на границе, будем иметь:

$$\iiint_{\Omega} \rho(P)\, u(P)\, dP = \iiint_{\Omega} \Delta\xi(P)\, u(P)\, dP = \iiint_{\Omega} \xi(P)\, \Delta u(P)\, dP =$$
$$= \iiint_{\Omega} \xi(P_0)\, \Delta_0 u(P_0)\, dP_0,$$

где символ Δ_0 означает оператор Лапласа относительно переменных x_0, y_0, z_0, откуда

$$\iiint_{\Omega} \xi(P_0)\,(\Delta_0 u(P_0) - f(P_0))\, dP_0 = 0.$$

Из произвольности ξ следует

$$\Delta_0 u(P_0) = f(P_0).$$

что и требовалось доказать.

Заслуживает внимания ещё одно обстоятельство. Функция Грина удовлетворяет неравенству:

$$G(P, P_0) \leqslant \frac{1}{4\pi r}.$$

Это ясно из того, что функция g отрицательна на контуре и, следовательно, отрицательна везде.

Подобно тому как мы построили функцию Грина для задачи Дирихле в пространстве, мы могли бы построить такую же функцию на плоскости. Нам пришлось бы при этом вместо члена $\frac{1}{4\pi r}$ выделить слагаемое $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$. Мы получили бы вместо формулы (XXII.10) формулу

$$u(P) = -\iint_{\Omega} G(P, P_0) f(P_0)\, dP_0,$$

а вместо (XXII.7) формулу

$$u(P_0) = \int_S \frac{dG}{dn} F\, dS - \iint_{\Omega} G(P, P_0) f(P)\, dP.$$

§ 2. Понятие о функции Грина для задачи Неймана.

При решении задачи Неймана как в пространстве, так и на плоскости мы встретились бы с тем затруднением, что функции Грина в том смысле, как мы хотели её построить, не существует, так как соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение, равное постоянной. Нам пришлось бы искать обобщённую функцию Грина, т. е. потребовать, чтобы она удовлетворяла не уравнению Лапласа, а уравнению

$$\Delta G(P, P_0) = C.$$

В более общем случае, когда при решении уравнения Пуассона с условиями

$$\frac{du}{dn} + \alpha u = \varphi$$

соответствующая однородная задача имеет несколько решений, отличных от нуля, нужно искать функцию Грина как решение уравнения

$$\Delta G(P, P_0) = \sum_i z_i(P) z_i(P_0),$$

где $z_i(P)$ суть все линейно независимые решения однородной задачи.

Это можно сделать совершенно аналогично тому, что мы имели в случае одного переменного.

Рассмотрим один пример.

Пример 1. Построим функцию Грина для задачи Неймана для шара $R \leqslant 1$. По определению

$$G = \frac{1}{4\pi r} + g,$$

где

$$\Delta g = \text{const.}, \left.\frac{dg}{dn}\right|_{R=1} = -\frac{1}{4\pi} \left.\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right|_{R=1}.$$

Для удобства предположим, что полюс функции Грина находится в точке с координатами $0,\ 0,\ z_0$. Тогда $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$,

$$\left.\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right|_{R=1} = -\left.\frac{x\cos nx + y\cos ny + (z - z\ )\cos nz}{r^3}\right|_{R=1}.$$

Но на поверхности $R = 1$ имеем $\cos nx = -x$, $\cos ny = -y$ $\cos nz = -z$.

Отсюда

$$\left.\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right|_{R=1} = \left.\frac{1 - z_0 z}{r^3}\right|_{R=1}. \qquad \text{(XXII.11)}$$

Введём ещё число $z_0' = \frac{1}{z_0}$ и функцию $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0')^2}$. Очевидно,

$$\left.\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}\right|_{R=1} = \left.\frac{1 - z_0' z}{r_1^3}\right|_{R=1}.$$

На основании формулы (X.11) имеем:

$$r'\big|_{R=1} = z_0 r_1\big|_{R=1}.$$

Пользуясь этим, получим:

$$\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}\Bigg|_{R=1} = z_0^2\,\frac{z_0 - z}{r^3}\Bigg|_{R=1}, \qquad \text{(XXII.12)}$$

откуда

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\Bigg|_{R=1} + \frac{1}{z_0}\,\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}\Bigg|_{R=1} = \frac{1 - 2zz_0 + z_0^2}{r^3}\Bigg|_{R=1} = \frac{1}{r}\Bigg|_{R=1}.$$

Для того чтобы закончить предварительные подсчёты, рассмотрим ещё функцию

$$w = \lg(z_0' - z + r_1).$$

Докажем, что w — гармоническая функция. В самом деле,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{r_1(z_0' - z + r_1)}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{r_1(z_0' - z + r_1)},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-1 + \frac{z - z_0'}{r_1}}{z_0' - z + r_1} = -\frac{1}{r_1},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{(z_0' - z)(r_1^2 - x^2) + r_1^3 - 2r_1x^2}{r_1^3(z_0' - z + r_1)^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{(z_0' - z)(r_1^2 - y^2) + r_1^3 - 2r_1y^2}{r_1^3(z_0' - z + r_1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{z - z_0'}{r_1^3}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{z_0' - z}{r_1^3}.$$

Отсюда следует $\Delta w = 0$.

Вычислим ещё выражение для $\frac{dw}{dn}\Big|_{R=1}$. Мы будем иметь:

$$\frac{dw}{dn}\Bigg|_{R=1} = \frac{x\cos nx + y\cos ny - (z_0' - z + r_1)\cos nz}{r_1(z_0' - z + r_1)}\Bigg|_{R=1} =$$

$$= -\frac{[r_1^2 - (z_0' - z)^2] - z(r_1 + z_0' - z)}{r_1(z_0' - z + r_1)}\Bigg|_{R=1} = -\frac{r_1 - z_0'}{r_1}\Bigg|_{R=1} =$$

$$= -1 + \frac{z_0'}{r_1}\Bigg|_{R=1} = -1 + \frac{1}{z_0 r_1}\Bigg|_{R=1} = -1 + \frac{1}{r}\Bigg|_{R=1}. \qquad \text{(XXII.13)}$$

Пользуясь (XXII.11), (XXII.12) и (XXII.13), легко проверить, что функция Грина должна иметь вид

$$G = \frac{1}{4\pi r} + \frac{1}{z_0}\,\frac{1}{4\pi r_1} - \frac{w}{4\pi} - \frac{R^2}{8\pi} + C.$$

где C — некоторая постоянная, определяемая из условия

$$\iiint\limits_{R\leq 1} G\,dx\,dy\,dz=0.$$

Подсчёт, который мы не будем здесь проводить подробнее, даёт

$$C=-\frac{z_0^2}{8\pi}-\frac{1}{4\pi}\ln z_0.$$

В связи с этим получим окончательно

$$G=\frac{1}{4\pi r}+\frac{1}{r_0}\frac{1}{4\pi r}-\frac{w}{4\pi}-\frac{R^2}{8\pi}-\frac{z_0^2}{8\pi}-\frac{1}{4\pi}\lg z_0.$$

Возвращаясь к обозначениям лекции XX, получим отсюда:

$$G=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{R^2-2RR_0\cos\gamma+R_0^2}}+\frac{1}{\sqrt{R^2R_0^2-2RR_0\cos\gamma+1}}-\right.$$
$$\left.-\lg\left(1-RR_0\cos\gamma+\sqrt{R^2R_0^2-2RR_0\cos\gamma+1}\right)-\frac{R^2}{2}-\frac{R_0^2}{2}\right\}.$$

ЛЕКЦИЯ XXIII.

КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

§ 1. Уравнение теплопроводности.

В тех задачах, которые мы до сих пор рассматривали, самый метод решения, в большинстве случаев, давал ответ на вопрос о корректности их постановки. Однако в некоторых других задачах удобнее прежде установить эту корректность непосредственно.

Рассмотрим уравнение распространения тепла в ограниченной области Ω пространства x, y, z. Пусть $u(x, y, z, t)$ является температурой в точке (x, y, z) в момент времени t, тогда u удовлетворяет уравнению:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \text{(XXIII.1)}$$

и пусть даны следующие условия:

$$u|_S = f(S, t), \qquad \text{(XXIII.2)},$$

$$u|_{t=0} = \varphi(P), \qquad \text{(XXIII.3)}$$

где S — поверхность, ограничивающая область Ω, а P — точка этой области.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Во все моменты времени $0 \leqslant t_0 \leqslant T$ внутри области Ω справедливо неравенство:

$$|u(P_0, t_0)| \leqslant \max_{\substack{P_0 \subset \Omega \\ 0 \leqslant t \leqslant t_0}} [|f|, |\varphi|].$$

Иными словами, наибольшее значение функции u достигается или при $t = 0$ или на границе области Ω.

Предположим противное. Пусть в точке P_0 в момент t_0 функция приняла значение, большее по сравнению со всеми остальными в области Ω, за промежуток $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Тогда

$$u(P_0, t_0) - \max_{\substack{P_0 \subset \Omega \\ 0 \leq t \leq t_0}} [|f|, |\varphi|] = \varepsilon_0 > 0.$$

Составим функцию

$$v = u + \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{t_0 - t}{t_0}.$$

Функция v попрежнему сохраняет то свойство, что максимум её значений не находится ни при $t=0$, ни на границе области Ω, так как уже значение её в точке (P_0, t_0) по крайней мере на $\frac{\varepsilon_0}{2}$ превышает максимум значений на границе, ибо

$$v(P_0, t_0) = u(P_0, t_0), \quad v|_S \leq u|_S + \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad v|_{t=0} = u|_{t=0} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Однако это невозможно по следующей причине. Если бы максимум v лежал внутри Ω при $t < t_0$, то в этой точке обращались бы в нуль первые производные от v, а вторые производные

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

были бы неположительны и, следовательно, выражение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

было бы также неположительно. С другой стороны,

$$\Delta v = \Delta u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{2t_0},$$

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0}{2t_0}.$$

Таким образом, неположительное число оказывается равным числу, большему нуля. Полученное противоречие указывает на неправильность нашего предположения.

Остаётся рассмотреть случай, когда максимум v достигается при $t = t_0$. При этом $\frac{\partial v}{\partial t}$ в этой точке, очевидно, не может быть отрицательной, ибо иначе при меньших t были бы большие значения v и наша точка не была бы максимумом.

С другой стороны, в этой точке, очевидно,

$$\Delta v \leq 0.$$

Повторяя прежние соображения, видим, что неположительное выражение

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t}$$

больше нуля.

Значит, этот случай также невозможен. Теорема доказана. Совершенно так же доказывается, что и минимум u может быть достигнут либо при $t=0$, либо на границе Ω.

Из этой теоремы немедленно следует корректность и единственность рассматриваемой задачи.

В самом деле, если бы мы имели два каких-либо решения задачи, то их разность обращалась бы в нуль как при $t=0$, так и на S. Но тогда, по доказанной теореме, и максимум и минимум этой разности были бы равны нулю. Следовательно, и сама эта разность была бы равна нулю и оба решения совпали бы. Значит, двух разных решений задача наша иметь не может.

Так же устанавливается и корректность. Если разность краевых условий по абсолютной величине меньше $\varepsilon > 0$, то и разность решений, как решение с малыми краевыми значениями, тоже будет меньше по абсолютной величине, чем ε.

Доказанные нами единственность и корректность решения относятся, очевидно, и к неоднородному уравнению

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = F, \tag{XXIII.4}$$

так как очевидно, что разность двух решений этого уравнения есть решение однородного уравнения (XXIII.1).

Можно доказать для этого последнего уравнения и более сильную теорему.

Теорема 2. Решение уравнения (XXIII.4) «непрерывно» зависит не только от условий (XXIII.2) и (XXIII.3), но и от свободного члена F уравнения (XXIII.4), или более точно:

Если значения $|f|$ и $|\varphi|$ меньше, чем $\frac{\varepsilon_0}{2}$, а значение F удовлетворяет неравенству

$$|F| < \frac{\varepsilon_0}{2t_0},$$

то решение уравнения (XXIII.4) удовлетворяет неравенству

$$|u| \leqslant \varepsilon_0.$$

Допуская, что в точке P_0, t_0 наше решение принимает значение, большее чем ε_0, составим опять функцию

$$v = u + \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{t_0 - t}{t_0},$$

которая будет иметь максимум внутри при $t \leqslant t_0$. Однако, составляя для неё опять выражение

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t},$$

убеждаемся в его положительности везде, что противоречит условию существования максимума.

§ 2. Понятие обобщённого решения.

Во многих задачах математической физики, с которыми мы сейчас встретимся, существование решения устанавливается лишь при значительных ограничениях на краевые условия. Мы введём одно понятие, которое позволит нам не заниматься далее этими вопросами.

Пусть мы имеем три последовательности функций

$$F_n, \ \varphi_n \text{ и } f_n,$$

равномерно сходящиеся соответственно к непрерывным функциям F, φ и f, и пусть уравнение

$$\Delta u_n - \frac{\partial u_n}{\partial t} = F_n$$

при условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_n, \quad u|_S = f_n$$

имеет решение u_n (по доказанному такое решение единственно). Разность

$$u_m - u_n$$

на основании теоремы 2 (XXIII) по абсолютной величине сколь угодно мала, если m и n достаточно велики. Значит, последовательность u_n равномерно сходится к функции u, удовлетворяющей нашим предельным условиям.

О сходимости производных от u мы ничего не знаем, и поэтому мы не можем утверждать, что предельная функция удовлетворяет уравнению:

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = F. \tag{XXIII.5}$$

Будем называть функцию u обобщённым решением уравнения (XXIII.5).

Такое обобщённое решение единственно, ибо не может существовать двух таких последовательностей u_n и $u^{(1)}{}_n$, у которых функции f_n и $f_n^{(1)}$, φ_n и $\varphi_n^{(1)}$, F_n и $F_n^{(1)}$ стремились бы соответственно к одному пределу, а сами последовательности — к различным пределам, потому что при этом последовательность

$$u_1,\ u_1^{(1)},\ u_2,\ u_2^{(1)},\ \ldots,\ u_n,\ u_n^{(1)},\ \ldots$$

и расходилась бы, что невозможно.

Вместо того чтобы ставить задачу об отыскании истинного решения, практически достаточно ставить и решать задачу об отыскании обобщённого решения. Действительно, нам неизвестны точные величины f, φ и F. Те их значения, которые мы берём, не суть точные, а лишь мало отличаются от точных. Поэтому обобщённое решение, даже если оно не является истинным, мало будет отличаться от последнего.

Мы говорили сейчас об обобщённом решении уравнения теплопроводности. То же самое относится, однако, и к уравнению Пуассона, рассмотренному выше.

Приведём пример существования такого обобщённого решения.

Пример 1. Пусть

$$\Delta u=\frac{x^2-y^2}{R^2}\left[\frac{5}{\ln R}-\frac{1}{(\ln R)^2}\right], \qquad \text{(XXIII.6)}$$

где

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Можно доказать, что функция

$$u_0=(x^2-y^2)\ln|\ln R|$$

будет обобщённым решением уравнения (XXIII.6).

Функция u_0 везде, кроме точки $(0,0,0)$, удовлетворяет уравнению (XXIII.6) и непрерывна в этой точке.

В самом деле,

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=2\ln|\ln R|+\frac{4x^2}{R^2\ln R}+ \\ +(x^2-y^2)\left[\frac{1}{R^2\ln R}-\frac{2x^2}{R^4\ln R}-\frac{x^2}{R^4(\ln R)^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=-2\ln|\ln R|-\frac{4y^2}{R^2\ln R}+ \\ +(x^2-y^2)\left[\frac{1}{R^2\ln R}-\frac{2y^2}{R^4\ln R}-\frac{y^2}{R^4(\ln R)^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}=(x^2-y^2)\left[\frac{1}{R^2\ln R}-\frac{2z^2}{R^4\ln R}-\frac{z^2}{R^4(\ln R)^2}\right].$$

В точке $(0,0,0)$, как видно, её вторые производные теряют смысл.

Решение уравнения (XXIII.6) с граничными условиями

$$u\Big|_{R=\frac{1}{2}}=u_0\Big|_{R=\frac{1}{2}}$$

не существует.

Если бы u было таким решением, то разность $u-u_0$ должна была бы быть гармонической функцией везде, кроме, быть может, начала координат, везде непрерывной и на границе области должна была бы равняться нулю. Однако мы видели ранее, что непрерывная функция, гармоническая всюду, кроме, быть может, одной точки, есть гармоническая функция и в этой точке.

В силу этой теоремы разность $u-u_0$ есть гармоническая функция, равная нулю на поверхности шара, т. е. нуль.

Значит, единственным возможным решением нашей задачи является функция u_0. Так как она не удовлетворяет уравнению (XXIII.6), то наша задача вообще не имеет решения.

Взяв теперь уравнение теплопроводности с той же правой частью, что (XXIII.6):

$$\Delta u-\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{x^2-y^2}{R^2}\left[\frac{5}{\ln R}-\frac{2}{(\ln R)^2}\right],$$

и опять решая его при условиях

$$u\Big|_{R=\frac{1}{2}}=u_0\Big|_{R=\frac{1}{2}},\quad u\Big|_{t=0}=u^0,$$

мы не сможем найти решения уравнения.

Обобщённым решением будет при этом служить опять функция u_0.

§ 3. Волновое уравнение.

Займёмся теперь изучением волнового уравнения

$$\Delta u-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F \tag{XXIII.7}$$

и будем рассматривать его решение в области Ω, ограниченной поверхностью S при начальных условиях:

$$\begin{gathered} u\Big|_{t=0}=\varphi_0(P),\\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(P), \end{gathered} \tag{XXIII.8}$$

и при условиях на границе:

$$\frac{du}{dn}\Big|_S=f(S). \tag{XXIII.9}$$

Без всяких изменений наше рассуждение переносится и на тот случай, когда вместо (XXIII.9) на границе задана сама неизвестная функция.

Без ограничения общности можно всегда считать, что

$$\varphi_0=0, \quad \varphi_1=0, \quad f=0.$$

Если бы это было не так, то, взяв вместо u новую неизвестную v по формуле

$$v=u-w,$$

где w удовлетворяет (XXIII.8) и (XXIII.9), мы сразу получили бы однородные условия для v.

Рассмотрим интеграл

$$K_1(t)=\iiint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Вычисляя $\frac{dK_1(t)}{dt}$, мы получим, используя уравнение (XXIII.7)

$$\frac{dK_1}{dt}=2\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]dx\,dy\,dz=$$

$$=2\iiint\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-F\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx\,dy\,dz=$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial z}\right)-F\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx\,dy\,dz=$$

$$=2\iint\limits_{S}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{du}{dn}\,dS-2\iiint\limits_{\Omega}F\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dy\,dz.$$

В силу того, что по нашему предположению $\left.\frac{du}{dn}\right|_S=0$, получим:

$$\frac{dK_1}{dt}=-2\iiint\limits_{\Omega}F\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dy\,dz. \tag{XXIII.10}$$

Пользуясь известным неравенством:

$$|ab|\leqslant\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2,$$

перепишем (XXIII.10) в виде

$$\frac{dK_1}{dt}<\iiint\limits_{\Omega}F^2\,dx\,dy\,dz+\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dx\,dy\,dz$$

или, ещё усиливая неравенство:

$$\frac{dK_1}{dt} \leqslant \iiint_\Omega F^2\,dx\,dy\,dz + K_1.$$

Если положить

$$\iiint_\Omega F^2\,dx\,dy\,dz = A(t),$$

то

$$\frac{dK_1}{dt} - K_1 \leqslant A(t),$$

$$\frac{d(e^{-t}K_1)}{dt} \leqslant e^{-t}A(t). \qquad \text{(XXIII.11)}$$

Легко видеть, что $K_1(0)=0$. Отсюда

$$e^{-t}K_1(t) \leqslant \int_0^t e^{-t_1}A(t_1)\,dt_1,$$

$$K_1(t) \leqslant e^t \int_0^t e^{-t_1}A(t_1)\,dt_1 = \int_0^t e^{t-t_1}A(t_1)\,dt_1. \qquad \text{(XXIII.12)}$$

Отсюда сразу следует, что если только $A(t)$ сколь угодно мало, то и величина $K_1(t)$ сколь угодно мала.

Заметим ещё, что, положив

$$K_0(t) = \iiint_\Omega u^2\,dx\,dy\,dz,$$

будем иметь:

$$\frac{dK_0(t)}{dt} = 2\iiint_\Omega u\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dy\,dz \leqslant K_0(t) + K_1(t),$$

т. е.

$$\frac{dK_0(t)}{dt} - K_0(t) \leqslant K_1(t). \qquad \text{(XXIII.13)}$$

Из неравенства (XXIII.13) так же, как раньше из (XXIII.11), следует:

$$K_0(t) \leqslant \int_0^t e^{t-t_1}K_1(t_1)\,dt_1. \qquad \text{(XXIII.14)}$$

Вместе с малостью $K_1(t)$, очевидно, будет мало также и $K_0(t)$.

Из полученных оценок (XXIII.12) и (XXIII.14) можно вывести ряд следствий.

Теорема 3. Пусть последовательность функций u_n удовлетворяет уравнениям

$$\Delta u_n - \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = F_n$$

и условиям:

$$u_n\Big|_{t=0} = \frac{\partial u_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad \text{(XXIII.15)}$$

$$\frac{du}{dn}\Big|_S = 0, \qquad \text{(XXIII.16)}$$

и пусть функции F_n удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left[\iiint_\Omega F_n^2\, dx\, dy\, dz \right] dt = 0.$$

Тогда для всех значений t, таких, что

$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

имеют место равенства:

$$\lim_{n\to\infty} K_0(t) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} K_1(t) = 0.$$

Усиливая неравенства (XXIII.12) и (XXIII.14), мы получим:

$$K_1(t) \leqslant e^T \int_0^T A(t_1)\, dt_1, \qquad \text{(XXIII.17)}$$

и

$$K_0(t) \leqslant e^T \int_0^T K_1(t_1)\, dt_1 \leqslant e^{2T} \cdot T \int_0^T A(t_1)\, dt_1; \qquad \text{(XXIII.18)}$$

из (XXIII.17) и (XXIII.18) сразу следует наша теорема.

Из доказанной теоремы следует корректность поставленной задачи, если только за «меру отклонения» двух функций взять отклонение в среднем. Если мы будем сравнивать между собою два решения уравнений:

$$\Delta u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = F_1 \quad \text{и} \quad \Delta u_2 - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = F_2, \qquad \text{(XXIII.19)}$$

при однородных условиях (XXIII.15) и (XXIII.16), для которых разность $F_1 - F_2$ достаточно мала, то хотя мы и не можем утверждать, что эти решения везде мало отличаются одно от другого, тем не менее, разность $u_1 - u_2$ со своими производными первого порядка будет для любых моментов времени сколь угодно мала в среднем, т. е

$$\iiint_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 \, dx\, dy\, dz < \varepsilon,$$

$$\iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz < \varepsilon.$$

Если мы решаем две задачи с неоднородными близкими условиями, то после приведения их к однородным, мы получим опять два уравнения (XXIII.19) с близкими правыми частями, и, следовательно, решения их будут близки в среднем.

Так же, как и для уравнения теплопроводности, мы можем легко доказать единственность решения однородной задачи, ибо решение такой задачи должно иметь интеграл от квадрата, равный нулю.

Наконец, так же, как и в прошлых задачах, вопрос о существовании решения представляет собою значительные трудности, которые, как можно показать, даже отчасти превосходят соответствующие трудности в уравнении Лапласа и уравнении теплопроводности.

Избежать этих трудностей можно, введя понятие об обобщённых решениях.

§ 4. Обобщённые решения волнового уравнения.

Будем говорить, что функция u, интегрируемая со своим квадратом в некоторой области Ω, есть предел в среднем для последовательности u_n, если

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{\Omega} (u_n - u)^2 \, dx\, dy\, dz = 0.$$

Мы будем называть обобщённым решением уравнения (XXIII.7) *при условиях* (XXIII.8) *и* (XXIII.9) *функцию u, являющуюся пределом в среднем для последовательности функций u_n, удовлетворяющих уравнениям*

$$\Delta u_n - \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = F_n$$

и условиям (XXIII.15) *и* (XXIII.16), *где последовательность F_n сходится в среднем к F.*

Условимся считать две функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ одинаковыми, если

$$\iiint\limits_{\Omega} (u^{(1)}-u^{(2)})^2\,dx\,dy\,dz=0\,^{1)}.$$

Обобщённое решение единственно, ибо последовательность u_n не может иметь двух пределов в среднем, иначе мы имели бы для этих разных пределов $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ неравенство:

$$\iiint\limits_{\Omega} (u^{(1)}-u^{(2)})^2\,dx\,dy\,dz\leqslant$$
$$\leqslant\iiint\limits_{\Omega} [(u^{(1)}-u_n)+(u_n-u^{(2)})]^2\,dx\,dy\,dz\leqslant$$
$$\leqslant 2\iiint\limits_{\Omega} (u^{(1)}-u_n)^2\,dx\,dy\,dz+2\iiint\limits_{\Omega} (u^{(2)}-u_n)^2\,dx\,dy\,dz\leqslant 4\varepsilon$$

и $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ совпали бы.

Существование обобщённого решения можно установить, пользуясь одной теоремой из теории функций вещественного переменного, которая носит имя теоремы Фишера-Риса.

Эта теорема гласит:

Если последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ функций, интегралы от квадрата которых ограничены, обладает тем свойством, что при достаточно больших m и n:

$$\iiint\limits_{\Omega} (u_m-u_n)^2\,dx\,dy\,dz<\varepsilon,$$

то существует предел в среднем этой последовательности, т. е. такая функция u, что

$$\lim_{n\to\infty}\iiint\limits_{\Omega} (u_n-u)^2\,dx\,dy\,dz=0.$$

Доказательство этой теоремы мы приведём в конце лекции.

В противоположность прошлой задаче обобщённые решения волнового уравнения могут уже не быть непрерывны с первыми производными. Выяснение обстоятельств, при которых это имеет место, заняло бы чересчур много времени, и мы не будем этим заниматься.

---

[1]) Как мы видели выше (замечание § 6 лекции VI), при этом они могут отличаться друг от друга лишь на множестве меры нуль.

Закончим небольшим примером.

Пример 2. Возьмём за область Ω шар радиуса 1.

Пусть $\psi(\xi)$ — некоторая функция, заданная в промежутке $-\infty < \xi < +\infty$.

Рассмотрим функцию

$$u_0 = \frac{\psi(t+r) - \psi(t-r)}{r}. \tag{XXIII.20}$$

Если ψ имеет везде непрерывные вторые производные, то u_0 — непрерывная функция вместе с первыми производными. Дифференцированием легко убедиться, что u_0 есть решение уравнения

$$\Delta u_0 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0.$$

Пусть теперь функция ψ из формулы (XXIII.20) дифференцируема один раз или не имеет вовсе производной. При этом можно установить, что u_0 всё же останется обобщённым решением.

Если в некоторой точке $\xi = t_0$ функция $\psi(\xi)$ не имеет производной, то u_0 будет терпеть разрыв в точке $r = 0$, $t = t_0$. Функция u, удовлетворяющая условиям

$$u\,|_S = u_0\,|_S, \quad u\,|_{t=0} = u_0\,|_{t=0}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0}$$

и уравнению

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

при этом вообще не существует.

Существует ещё другой подход к обобщённым решениям, позволяющий определить их непосредственно, не прибегая к помощи предельного перехода.

Если u_n есть некоторое решение уравнения

$$Lu_n = F_n,$$

а ψ — совершенно произвольная функция, имеющая непрерывные производные до 2-го порядка, и отличная от нуля лишь в некоторой внутренней части σ области Ω, то

$$\iiiint\limits_{\Omega} (\psi F_n - u_n M\psi)\, d\Omega = 0.$$

Внеинтегральные члены пропадают в силу того, что ψ и её производные обращаются в нуль вне σ.

Отсюда, пользуясь так называемым неравенством Буняковского-Шварца (см. § 6 (XXIII)),

$$\left|\iiint\limits_\Omega (\psi F - uM\psi)\,d\Omega\right| = \left|\iiint\limits_\Omega [\psi(F-F_n) - (u-u_n)\,M\psi]\,d\Omega\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\iiint\limits_\Omega \psi^2\,d\Omega \iiint\limits_\Omega (F-F_n)^2\,d\Omega} +$$
$$+\sqrt{\iiint\limits_\Omega (u-u_n)^2\,d\Omega \iiint\limits_\Omega (M\psi)\,d\Omega} \leqslant \varepsilon.$$

Значит, для любого обобщённого решения при любом ψ справедливо интегральное равенство:

$$\iiint\limits_\Omega uM\psi\,d\Omega = \iiint\limits_\Omega \psi F\,d\Omega. \qquad \text{(XXIII.21)}$$

Этим равенством можно полностью заменить дифференциальное уравнение.

Если мы вспомним все наши доказательства существования решения, начиная от волнового уравнения, для решения которого мы пользовались методом Кирхгофа, и кончая теоремой существования краевых задач для различных дифференциальных операторов с одним и многими независимыми переменными, в разных областях частного вида, то убедимся, что формула (XXIII.21) была у нас важным звеном в доказательстве. Мы доказывали, таким образом, всюду лишь существование обобщённого решения. Уже из (XXIII.21), предполагая, что u имеет производные, и интегрируя по частям, мы выводим следующую формулу:

$$\iiint\limits_\Omega \psi(Lu - F)\,d\Omega = 0, \qquad \text{(XXIII.22)}$$

и заключаем отсюда, что u есть решение уравнения $Lu = F$. Этот последний этап можно провести лишь, если u есть решение задачи, понимаемое в классическом смысле слова.

С помощью теорем, доказанных в этой лекции, из дальнейшего будет следовать, что при довольно широких условиях можно для рассмотренных задач построить последовательность $\{u_n\}$, которая будет сходиться к обобщённому решению.

§ 5. Свойство обобщённых решений однородных уравнений.

Справедлива следующая общая теорема.

Теорема 4. Для уравнения Лапласа, уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ и однородного уравнения теплопроводности всякое обобщённое решение обязательно дифференцируемо сколько угодно раз и является решением в обычном смысле слова.

Этим свойством уравнения эллиптического и параболического типов резко отличаются от уравнений гиперболического типа, для которых это обстоятельство не имеет места.

Доказательство этой теоремы мы проведём сначала для уравнения теплопроводности.

Займёмся сперва построением некоторых вспомогательных функций. Определим функцию $\Psi(\xi)$ с помощью формулы:

$$\Psi(\xi)=\begin{cases} =0, & \xi\leqslant\frac{1}{4},\\ =\dfrac{1}{1+e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}}, & \frac{1}{4}\leqslant\xi\leqslant 1,\\ =1, & \xi\geqslant 1.\end{cases}$$

Функция $\Psi(\xi)$ обладает некоторыми очевидными свойствами:

а) Она непрерывна в промежутке $0\leqslant\xi\leqslant\infty$. В самом деле, дробь $\dfrac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}$ имеет своим пределом $+\infty$ при $\xi\to\frac{1}{4}+0$ и $-\infty$ при $\xi\to 1-0$. Следовательно,

$$\lim_{\xi\to\frac{1}{4}} e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}=\infty,\qquad \lim_{\xi\to 1} e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}=0,$$

откуда и следует непрерывность Ψ.

б) Функция $\Psi(\xi)$ имеет непрерывные производные всех порядков. Для того чтобы установить это, достаточно убедиться в том, что предельные значения производных любого порядка от $\Psi(\xi)$ при $\xi\to\frac{1}{4}$ или $\xi\to 1$ суть нули. Мы получим:

$$\Psi'(\xi)=\frac{-e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}}{\left[1+e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}\right]^2}\,\frac{d}{d\xi}\,\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}=$$

$$=\frac{\dfrac{d}{d\xi}\,\dfrac{\xi-\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}{\left(e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}+1\right)\left(e^{\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}+1\right)}.$$

Выражение $e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}$ стремится к бесконечности при $\xi\to\frac{1}{4}$ быстрее любой рациональной функции от ξ, а выражение $e^{\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}$ стремится к бесконечности при $\xi\to 1$ также быстрее любой рациональной функции от ξ. Следовательно,

$$\Psi'\left(\frac{1}{4}+0\right)=0;\quad \Psi'(1-0)=0. \tag{XXIII.23}$$

Любая производная $\Psi^{m}(\xi)$ будет допускать представление:

$$\Psi(\xi)=\sum_{\substack{p\geqslant 1\\ q\geqslant 1}}\frac{R_{m,p,q}(\xi)}{\left(e^{\frac{-\xi+\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}+1\right)^{p}\left(e^{\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\left(\xi-\frac{1}{4}\right)(1-\xi)}}+1\right)^{q}}, \tag{XXIII.24}$$

где $R_{m,p,q}(\xi)$ суть некоторые рациональные функции.

Эта формула сразу доказывается методом полной индукции. Из формулы (XXIII.24) вытекает:

$$\Psi^{(m)}\left(\frac{1}{4}+0\right)=0,\quad \Psi^{(m)}(1-0)=0, \tag{XXIII.25}$$

что и требовалось доказать.

Введём теперь в рассмотрение функцию

$$w_n(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0,\ t_0-t)=$$
$$=\begin{cases} 0, & t_0\leqslant t,\\ \dfrac{-1}{8\pi^{3/2}(t_0-t)^{3/2}}\,e^{-\frac{r^2}{4(t_0-t)}}\,\Psi\left(n^2\left(r^2+t_0-t\right)\right), & t<t_0,\end{cases}$$

где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, $0\leqslant r<+\infty$.

Отметим несколько свойств функции w_n.

а) Очевидно, что

$$\begin{aligned} &w_n(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0,\ t_0-t)=\\ &\qquad=n^3w_1\left[n(x-x_0),\ n(y-y_0),\ n(z-z_0),\ n^2(t_0-t)\right]. \end{aligned}\tag{XXIII.26}$$

б) Составим выражение:

$$\Delta w_n+\frac{\partial w_n}{\partial t}=\Phi_n(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0,\ t_0-t).$$

Тогда из формулы (XXIII.26) следует:

$$\begin{aligned} &\Phi_n(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0,\ t_0-t)=\\ &\qquad=n^5\Phi_1\left[n(x-x_0),\ n(y-y_0),\ n(z-z_0),\ n^2(t_0-t)\right]. \end{aligned}\tag{XXIII.27}$$

в) Функция Φ_n отлична от нуля лишь в области D_n:

$$\frac{1}{4n^2} \leqslant r^2 + t_0 - t \leqslant \frac{1}{n^2}; \quad t < t_0,$$

которая стягивается в точке x_0, y_0, z_0 при $n \to \infty$. В самом деле, в области, где $\Psi[n^2(r^2 + t_0 - t)]$ обращается в единицу, т. е. при $r^2 + (t_0 - t) \geqslant \frac{1}{n^2}$ мы имеем $w_n = -v$, где v есть частное решение уравнения $\Delta v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ (см. лекцию VIII). Значит,

$$\Delta w_n + \frac{\partial w_n}{\partial t} = 0; \quad r^2 + t_0 - t \geqslant \frac{1}{n^2}.$$

Обращение Φ_n в нуль при $r^2 + t_0 - t \leqslant \frac{1}{4n^2}$ очевидно.

г) Справедлива формула:

$$\iiiint\limits_{D_n} \Phi_n \, dx\, dy\, dz\, dt = \int\limits_{t_0 - \frac{1}{n^2}}^{t_0} \left[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n \, dx\, dy\, dz \right] dt = 1. \quad \text{(XXIII.28)}$$

В самом деле, на основании формулы Грина (XXII.4) имеем:

$$\int\limits_{t_0 - \frac{1}{n^2}}^{t_0} \left[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n \, dx\, dy\, dz \right] dt = \int\limits_{t_0 - \frac{1}{n^2}}^{t_0} \left[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\Delta w_n + \frac{\partial w_n}{\partial t} \right) dx\, dy\, dz \right] dt =$$

$$= \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} (w_n) \Big|_{t_0 - \frac{1}{n^2}}^{t_0} dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} v \Big|_{t = t_0 - \frac{1}{n^2}} dx\, dy\, dz.$$

Последний интеграл равен единице, как доказано в лекции XX (лемма 2), что и доказывает (XXIII.28).

д) Пусть $f(x, y, z, t)$ — произвольная непрерывная функция в области Ω четырёх переменных x, y, z, t.

Выберем область Ω_n значений x_0, y_0, z_0, t_0 так, чтобы для точек x_0, y_0, z_0, t_0 из Ω_n область D_n лежала целиком внутри Ω.

Построим в Ω_n функцию

$$f_n(x_0, y_0, z_0, t_0) = \iiiint\limits_{\Omega} \Phi_n(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0) f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Тогда последовательность $f_n(x_0, y_0, z_0, t_0)$ сходится к функции $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$, причём сходимость будет равномерной во всякой внутренней области.

Представим функцию f в виде

$$f(x, y, z, t) = f(x_0, y_0, z_0, t_0) + \eta.$$

Очевидно, что в области D_n при достаточно большом n мы будем иметь в силу непрерывности f

$$|\eta| < \varepsilon.$$

Обозначим:

$$\int_{-\infty}^{t_0} \left(\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_1|\, dx\, dy\, dz \right) dt = M.$$

В силу формулы (XXIII.27)

$$\int_{-\infty}^{t_0} \left(\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_n|\, dx\, dy\, dz \right) dt = \int_{-\infty}^{t_0} \left(\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_1|\, dx\, dy\, dz \right) dt = M.$$

Мы будем иметь:

$$f_n(x_0, y_0, z_0, t_0) = \iiiint_{\Omega} \Phi_n f\, dx\, dy\, dz\, dt =$$

$$= \iiiint_{\Omega} \Phi_n f(x_0, y_0, z_0, t_0)\, dx\, dy\, dz\, dt + \iiiint_{\Omega} \Phi_n \eta\, dx\, dy\, dz\, dt =$$

$$= f(x_0, y_0, z_0, t_0) + \iiiint_{D_n} \Phi_n \eta\, dx\, dy\, dz\, dt,$$

откуда

$$|f_n(x_0, y_0, z_0, t_0) - f(x_0, y_0, z_0, t_0)| \leqslant \varepsilon M,$$

что и требовалось доказать.

е) Функция f_n, которую мы построили, будет дифференцируема неограниченно. Это свойство вытекает из неограниченной дифференцируемости Φ_n.

После этих замечаний можно уже доказать нашу теорему.

Пусть u — некоторое решение уравнения теплопроводности. Составим $u_n(x_0, y_0, z_0, t_0)$.

Тогда все $u_n(x_0, y_0, z_0, t_0)$ при любом n равны между собой и не зависят от n.

В самом деле,

$$u_n(x_0, y_0, z_0, t_0) - u_{n+p}(x_0, y_0, z_0, t_0) =$$

$$= \iiiint_{\Omega} u(x, y, z, t)(\Phi_n - \Phi_{n+p})\, dx\, dy\, dz\, dt =$$

$$= \iiiint_{\Omega} u(x, y, z, t) \left[\Delta(w_n - w_{n+p}) + \frac{\partial}{\partial t}(w_n - w_{n+p}) \right] dx\, dy\, dz\, dt.$$

Но $w_n - w_{n+p} = \psi$ отлична от нуля только в области

$$\frac{1}{4(n+p)^2} \leqslant r^2 + t_0 - t \leqslant \frac{1}{n^2},$$

ибо при $r^2 + t_0 - t > \frac{1}{n^2}$ функция w_n совпадает с w_{n+p}.

Функция ψ удовлетворяет всем условиям для применимости формулы (XXIII.21). Очевидно, при этом

$$M = \Delta + \frac{\partial}{\partial t},$$

$$L = \Delta - \frac{\partial}{\partial t},$$

откуда, заметив, что наше уравнение имеет вид: $Lu = 0$, т. е., что $F = 0$, имеем

$$u_n - u_{n+p} = \iiiint\limits_{\Omega} \psi F \, dx \, dy \, dz \, dt = 0.$$

Отсюда следует, что $u = u_n$, но u_n имеет неограниченное число производных. Следовательно, u также дифференцируемо сколько угодно раз. Теорема доказана.

Пусть теперь функция удовлетворяет уравнению:

$$\Delta u + \lambda u = 0.$$

Положим:

$$v = e^{-\lambda t} u.$$

Тогда

$$\Delta v = e^{-\lambda t} \Delta u = -\lambda e^{-\lambda t} u.$$

Следовательно,

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Функция v на основании только что доказанного будет дифференцируема сколько угодно раз. Следовательно, тем же свойством будет обладать и функция u, что и требовалось доказать.

§ 6. Неравенства Буняковского-Шварца и Минковского.

Пусть $\rho(P)$ — неотрицательная функция, которую мы назовём весом.

Пусть две функции $\varphi(P)$ и $\psi(P)$, заданные в области Ω, интегрируемы с квадратом модуля с весом $\rho(P)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} |\varphi(P)|^2 \rho(P) \, dP < \infty, \\ &\int\limits_{\Omega} |\psi(P)|^2 \rho(P) \, dP < \infty. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXIII.29)}$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\left| \int\limits_{\Omega} \varphi(P) \psi(P) \rho(P) \, dP \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} |\varphi(P)|^2 \rho(P) \, dP \int\limits_{\Omega} |\psi(P)|^2 \rho(P) \, dP. \qquad \text{(XXIII.30)}$$

Очевидно, для доказательства достаточно ограничиться случаем, когда $\psi(P)$ и $\varphi(P)$ — вещественные неотрицательные функции, ибо

$$\left|\int_\Omega \varphi(P)\psi(P)\rho(P)\,dP\right| \leqslant \int_\Omega |\varphi(P)||\psi(P)|\rho(P)\,dP, \qquad \text{(XXIII.31)}$$

Каковы бы ни были функции, положительные φ и ψ, для них имеет место неравенство:

$$\varphi\psi \leqslant \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\psi^2.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega \varphi(P)\psi(P)\rho(P)\,dP$$

имеет смысл.

Рассмотрим также имеющий смысл интеграл:

$$\int_\Omega (\varphi-\lambda\psi)^2\rho\,dP = \int_\Omega \varphi^2\rho\,dP - 2\lambda\int_\Omega \varphi\psi\rho\,dP + \\ + \lambda^2\int_\Omega \psi^2\rho\,dP = a\lambda^2 - 2b\lambda + c. \qquad \text{(XXIII.32)}$$

Парабола

$$y = a\lambda^2 - 2b\lambda + c$$

в плоскости переменных y и λ не может иметь ни одной точки ниже оси λ, так как величина (XXIII.32) больше или равна нулю. Значит, уравнение

$$a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0$$

не может иметь различных вещественных корней, а один кратный корень может существовать у этого уравнения лишь тогда, когда существует λ_0, такое, что

$$\int_\Omega (\varphi-\lambda_0\psi)^2\rho\,dP = 0,$$

т. е. когда φ и ψ отличаются множителем. Следовательно,

$$b^2 \leqslant ac,$$

причём знак равенства может иметь место лишь в том случае, если φ и ψ пропорциональны. Тем самым неравенство Буняковского-Шварца (XXIII.30) доказано.

Из неравенства Шварца очевидным образом следует для любых φ и ψ, интегрируемых вместе с их квадратами и с весом ρ, неравенство:

$$\left|\int\limits_{\Omega}(\varphi^2+2\varphi\psi+\psi^2)\,\rho\,dP\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega}|\varphi|^2\rho\,dP + \int\limits_{\Omega}|\psi|^2\rho\,dP + 2\sqrt{\int\limits_{\Omega}|\psi|^2\rho\,dP\int\limits_{\Omega}|\varphi|^2\rho\,dP} =$$

$$= \left(\sqrt{\int\limits_{\Omega}|\varphi|^2\rho\,dP} + \sqrt{\int\limits_{\Omega}|\psi|^2\rho\,dP}\right)^2,$$

или

$$\sqrt{\left|\int\limits_{\Omega}(\varphi+\psi)^2\rho\,dP\right|} \leqslant \sqrt{\int\limits_{\Omega}|\varphi|^2|\rho\,dP} + \sqrt{\int\limits_{\Omega}|\psi|^2\rho\,dP}. \quad \text{(XXIII.33)}$$

Неравенство (XXIII.33), доказанное нами, носит название неравенства Минковского.

Мы проводили эти рассуждения в предположении, что рассматриваемые функции интегрируемы вместе с их квадратом в обычном смысле слова. Однако нетрудно перенести все эти рассуждения на случай интегралов Лебега.

§ 7. Теорема Рисса-Фишера.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы Рисса-Фишера, сделаем несколько элементарных замечаний.

Лемма 1. Пусть f суммируема в Ω и пусть

$$f < h, \quad \int\limits_{\Omega} f\,dv = A, \quad \text{где} \quad h > 0, \quad A > 0.$$

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует замкнутое множество F_ε, на котором функция f непрерывна и неотрицательна: $f \geqslant 0$, и такое, что

$$mF_\varepsilon > \frac{A}{h} - \varepsilon.$$

В самом деле, существует замкнутое множество F'_ε, на котором f непрерывна, и такое, что

$$\int\limits_{F'_\varepsilon} f\,dv > A - \varepsilon h.$$

Выделим из F'_ε такое подмножество F_ε, где $f \geqslant 0$. Очевидно,

$$\int\limits_{F_\varepsilon} f\,dv \geqslant \int\limits_{F'_\varepsilon} f\,dv > A - \varepsilon h.$$

По теореме о среднем

$$\int\limits_{F_\varepsilon} f\,dv \leqslant hmF_\varepsilon,$$

откуда и следует наша лемма.

Пусть теперь $f \geqslant 0$ — суммируемая функция в ограниченной области Ω. Введём в рассмотрение число

$$M > \frac{1}{m\Omega}\int\limits_{\Omega} f\,dv$$

и рассмотрим функцию

$$\varphi = M - f.$$

Очевидно,

$$\varphi \leqslant M, \quad \int\limits_{\Omega} \varphi\,dv = Mm\Omega - \int\limits_{\Omega} f\,dv.$$

Применяя лемму 1, мы видим, что существует замкнутое множество F_ε, на котором φ, а значит, и f, непрерывна:

$$M - f > 0,$$

и для которого

$$mF_\varepsilon \geqslant m\Omega - \frac{1}{M}\int\limits_{\Omega} f\,dv - \varepsilon.$$

Этот результат сформулируем в виде особой леммы.

Лемма 2. Если $f \geqslant 0$ и суммируема в Ω, то для любых $M > 0$, $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество F_ε, на котором f непрерывна, удовлетворяет неравенству:

$$f \leqslant M,$$

и для которого

$$mF_\varepsilon \geqslant m\Omega - \frac{1}{M}\int\limits_{\Omega} f\,dv - \varepsilon.$$

Теорема Рисса-Фишера. *Пусть имеется последовательность функций*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots,$$

интегрируемых с квадратом в ограниченной области Ω. Пусть для любого ε можно указать такое $N(\varepsilon)$, что

$$\int\limits_{\Omega} (\varphi_k - \varphi_s)^2\,dv < \varepsilon, \quad \text{если} \quad k > N(\varepsilon),\ s > N(\varepsilon). \qquad \text{(XXIII.34)}$$

Тогда существует такая функция φ_0, интегрируемая с квадратом в Ω, что

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega} (\varphi_k - \varphi_0)^2\,dv = 0. \qquad \text{(XXIII.35)}$$

Мы будем говорить, что φ_0 есть предел в среднем для последовательности φ_k.

Докажем эту теорему. Пусть для простоты $m\Omega = 1$. Рассмотрим последовательность чисел $N_k = N\left(\frac{1}{2^{3k}}\right)$ и выберем из нашей последовательности частичную подпоследовательность

$$\psi_k = \varphi_{N_k}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega} (\psi_{k+1} - \psi_k)^2 \, dv < \frac{1}{2^{3k}}.$$

Применим лемму 2, положив $M = \frac{1}{2^{2k}}$, $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$.

Существует замкнутое множество F'_k, на котором $(\psi_{k+1} - \psi_k)^2$ непрерывна, и

$$(\psi_{k+1} - \psi_k)^2 < \frac{1}{2^{2k}},$$

причём

$$mF'_k \geqslant 1 - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Можно указать такое подмножество $F_k \subset F'_k$, на котором непрерывны ψ_k и ψ_{k+1}, причём

$$mF_k \geqslant 1 - \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Рассмотрим замкнутое множество

$$F^{(s)} = F_s F_{s+1} \ldots$$

Очевидно,

$$mF^{(s)} \geqslant 1 - \frac{1}{2^{s-1}} - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{2^{s+1}} - \ldots = 1 - \frac{1}{2^{s-2}}.$$

На множестве $F^{(s)}$ имеем:

$$|\psi_k - \psi_{k+1}| < \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{для всех} \quad k \geqslant s.$$

Следовательно, последовательность ψ_i

$$\psi_k = \psi_1 + (\psi_2 - \psi_1) + \ldots + (\psi_k - \psi_{k-1})$$

равномерно сходится к непрерывной функции φ_0 на всех $F^{(s)}$.

Функция φ_0, определённая на всех $F^{(s)}$, представляет собой, очевидно, измеримую функцию, заданную почти везде на Ω, ибо

$$\lim_{s\to\infty} mF^{(s)} = m\Omega = 1.$$

Функция φ_0 будет интегрируемой с квадратом. В самом деле:

$$\int\limits_{\Omega} \psi_k^2\, dv = \int\limits_{\Omega} [\psi_1 + (\psi_k - \psi_1)]^2\, dv \leqslant 2 \int\limits_{\Omega} \psi_1^2\, dv + 2 \int\limits_{\Omega} (\psi_k - \psi_1)^2\, dv \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{\Omega} \psi_1^2\, dv + \frac{1}{4} = A,$$

откуда

$$\int\limits_{F^{(s)}} \varphi_0^2\, dv = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{F^{(s)}} \psi_k^2\, dv \leqslant A$$

и, следовательно, существует

$$\int\limits_{\Omega} \varphi_0^2\, dv = \lim_{s\to\infty} \int\limits_{F^{(s)}} \varphi_0^2\, dv \leqslant A.$$

Далее, при достаточно большом l

$$\int\limits_{F^{(s)}} (\psi_k - \varphi_0)^2\, dv \leqslant \int\limits_{F^{(s)}} [(\psi_k - \psi_l) + (\psi_l - \varphi_0)]^2\, dv \leqslant 2 \int\limits_{F^{(s)}} (\psi_k - \psi_l)^2 dv + 2\varepsilon^2,$$

откуда, при соответствующем ε, следует:

$$\int\limits_{\Omega} (\psi_k - \varphi_0)^2\, dv \leqslant \frac{1}{2^{2k-2}},$$

и значит, этот интеграл стремится к нулю при $k \to \infty$.

Следовательно, предел в среднем для ψ_k существует и равен φ_0.

Далее, если $s > N_k$, то имеем:

$$\int\limits_{\Omega} (\varphi_s - \varphi_0)^2\, dv \leqslant 2 \int\limits_{\Omega} (\psi_k - \varphi_0)^2\, dv + 2 \int\limits_{\Omega} (\varphi_s - \psi_k)^2\, dv \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{2^{2k-2}} + \frac{2}{2^{2k-2}} \leqslant \frac{1}{2^{2k-4}}.$$

Теорема доказана.

ЛЕКЦИЯ XXIV.

МЕТОД ФУРЬЕ.

§ 1. Разделение переменных.

Краевые задачи математической физики для уравнений параболического и гиперболического типов удобно решать приёмом, который предложен Фурье и который мы будем называть разделением переменных.

Сущность этого приёма мы разберём на частных примерах. Читателю нетрудно будет, руководствуясь соображениями, изложенными в предыдущих лекциях, сразу сообразить, как и в каких случаях метод Фурье позволяет отыскивать решение задачи.

Пусть ищется решение уравнения

$$\Delta u = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{XXIV.1}$$

в области Ω пространства x, y, z, ограниченной поверхностью S и для t, удовлетворяющего неравенству $0 \leqslant t \leqslant T$, при условиях:

$$u|_S = 0 \tag{XXIV.2}$$

и

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z). \tag{XXIV.3}$$

Отвлечёмся пока от условия (XXIV.3) и будем искать частные решения уравнения (XXIV.1), удовлетворяющие условию (XXIV.2).

Эти решения удобно искать в виде произведения двух функций:

$$u = U(x, y, z)\,T(t). \tag{XXIV.4}$$

Подставляя (XXIV.4) в (XXIV.1) и деля обе части на u, будем иметь:

$$\frac{\Delta U(x, y, z)}{U(x, y, z)} = \frac{1}{a}\frac{T'(t)}{T(t)}. \tag{XXIV.5}$$

Переменные x, y, z и t в уравнении (XXIV.5) разделены, левая часть не зависит от t, а правая от x, y, z. Это возможно лишь при условии, если и правая и левая части равны одной и той же постоянной $-\lambda$, откуда

$$\frac{\Delta U}{U} = -\lambda, \quad \frac{1}{a}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{XXIV.6}$$

или

$$\Delta U + \lambda U = 0, \tag{XXIV.7}$$

$$T(t) = Ce^{-\lambda a t}. \tag{XXIV.8}$$

Для того чтобы наше решение удовлетворяло условию (XXIV.2), нужно, чтобы этому условию удовлетворяла функция $U(x, y, z)$. Это возможно далеко не при всяком значении параметра λ. В самом деле, перенося в уравнении (XXIV.7) член, содержащий λU, в правую часть и рассматривая его как свободный член, получим, применяя формулу (XXII.7):

$$U(P_0) = \frac{\lambda}{4\pi} \iiint_{\Omega} G(P, P_0) U(P)\, dP, \tag{XXIV.9}$$

где $G(P, P_0)$ — функция Грина для оператора Лапласа в области Ω.

Уравнение (XXIV.9) есть линейное однородное интегральное уравнение 2-го рода типа Фредгольма. Оно имеет решения, отличные от нуля, лишь для некоторых дискретных значений λ. Пусть эти значения λ будут: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ и пусть

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$$

— соответствующие решения уравнения (XXIV.9). Тогда мы получим целый набор частных решений уравнения (XXIV.1) отыскиваемого типа:

$$u_i = U_i e^{-\lambda_i a t}.$$

Заметим, что ядро интегрального уравнения (XXIV.9) является симметрической функцией координат точек P и P_0.

Мы докажем, немного спустя, в теории интегральных уравнений с симметрическим ядром, что таких решений бесконечно много и что при любой φ можно построить ряд

$$u = \sum_{i=1} a_i U_i e^{-\lambda_i a t}, \tag{XXIV.10}$$

который будет удовлетворять условиям (XXIV.2) и (XXIV.3) и представлять собой обобщённое решение уравнения (XXIV.1). Из теоремы 4 (XXIII) следует, что всякое обобщённое решение уравнения (XXIV.1) есть решение в обычном смысле слова. Укажем пока без доказательства три важных свойства системы функций $U_i(x, y, z)$ и чисел λ_i:

1. Чисел λ_i бесконечно много, все они вещественны и положительны. (В некоторых других задачах это условие заменяется тем, что среди них — лишь конечное число отрицательных.)

2. Все функции $U_i(x, y, z)$ ортогональны и нормированы, т. е.

$$\iiint\limits_{\Omega} U_i(x, y, z)\, U_j(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}.$$

3. Функции U_i образуют так называемую полную систему, т. е. любая дважды непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x, y, z)$ представима рядом

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z), \qquad \text{(XXIV.11)}$$

сходящимся в среднем, где числа a_i — это так называемые коэффициенты Фурье функции φ. Если, кроме того, φ удовлетворяет условию

$$\varphi|_S = 0,$$

то ряд (XXIV. 11) сходится равномерно.

Поставим себе задачу отыскания коэффициентов Фурье функции $\varphi(x, y, z)$. Умножая обе части (XXIV.11) на U_j и интегрируя по области Ω, получим благодаря равномерной сходимости ряда:

$$\iiint\limits_{\Omega} U_j(x, y, z)\, \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \iiint\limits_{\Omega} U_i(x, y, z) U_j(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = a_j. \qquad \text{(XXIV.12)}$$

Формула (XXIV.12) и даёт нам a_j.

Для того чтобы ряд (XXIV.10) удовлетворял условию (XXIV.3), достаточно выполнения равенства (XXIV.11), в которое условие (XXIV.3) автоматически переходит при $t = 0$. Таким образом, условиям (XXIV.2) и (XXIV.3) ряд (XXIV.10) будет удовлетворять автоматически при a_j, являющихся коэффициентами Фурье функции φ.

Нетрудно установить, что ряд (XXIV.10) равномерно сходится и даёт обобщённое решение (XXIV.1). В самом деле, пусть

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i(x, y, z).$$

Очевидно, что

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i(x, y, z)\, e^{-\lambda_i a t}$$

даёт нам решение уравнения (XXIV.1) при условиях (XXIV.2) и

$$u_N \big|_{t=0} = \varphi_N.$$

Но

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N = \varphi.$$

В силу корректности, доказанной нами в прошлой лекции [см. § 2 (XXIII)], последовательность u_N сходится равномерно к обобщённому решению u, что и требовалось доказать.

Совершенно таким же образом ставится вопрос об интегрировании волнового уравнения.

Пусть ищется решение уравнения

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(XXIV.13)}$$

при начальных условиях:

$$u \big|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x, y, z) \qquad \text{(XXIV.14)}$$

и граничных условиях, например, вида

$$\frac{du}{dn}\bigg|_S = 0, \qquad \text{(XXIV.15)}$$

где S — поверхность, ограничивающая объём Ω в пространстве x, y, z.

Частные решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям (XXIV.15), можно попрежнему искать в виде

$$u = U(x, y, z)\, T(t). \qquad \text{(XXIV.16)}$$

Подставляя (XXIV.16) в (XXIV.13), получим:

$$T(t)\, \Delta U(x, y, z) = U(x, y, z)\, T''(t),$$

или

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta U(x, y, z)}{U(x, y, z)} = -\lambda^2,$$

откуда

$$T'' + \lambda^2 T = 0, \qquad \text{(XXIV.17)}$$

$$\Delta U + \lambda^2 U = 0. \qquad \text{(XXIV.18)}$$

Решение уравнения (XXIV.18) при условиях (XXIV.15) ищется опять при помощи функции Грина. Эта функция G_1

(P, P_0) в этом случае удовлетворяет не уравнению Лапласа, а уравнению

$$\Delta G_1 = -\frac{4\pi}{D},$$

где D—объём области Ω. Постоянная $-\frac{4\pi}{D}$ служит в этом случае решением сопряжённой однородной задачи, т. е.

$$\Delta\left(-\frac{4\pi}{D}\right) = 0, \quad \frac{d\left(-\frac{4\pi}{D}\right)}{dn} = 0,$$

и подобрана так, чтобы обеспечить существование функции Грина. Это вытекает из проведённого выше исследования задачи Неймана [см. § 2 (XXII)]. G_1 будет, таким образом, обобщённой функцией Грина.

Будем искать то решение U уравнения

$$\Delta U = -\lambda^2 U,$$

которое ортогонально к постоянной по нашей области:

$$\iiint\limits_{\Omega} \lambda^2 U\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Будем решать уравнение (XXIV.18), считая $\lambda^2 U$ свободным членом. При этом то его решение, которое само ортогонально к постоянной, должно на основании результатов прошлых лекций иметь вид:

$$U(P_0) = \lambda^2 \iiint\limits_{\Omega} \frac{G_1(PP_0)}{4\pi} U(P)\, dP. \qquad \text{(XXIV.19)}$$

Мы снова получили для собственных функций задачи интегральное уравнение с симметрическим ядром.

Для этого интегрального уравнения справедливы все высказанные нами ранее утверждения, кроме 3, которое видоизменяется при этом так.

3а. Всякая функция $\varphi(P)$, имеющая непрерывные производные 2-го порядка, ортогональная к постоянной

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{4\pi}{D} \varphi(P)\, dP = 0$$

и удовлетворяющая граничным условиям, разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям уравнения (XXIV.19).

Уравнение (XXIV.17) имеет два линейно независимых решения:

$$T_1 = \cos \lambda t,$$
$$T_2 = \sin \lambda t.$$

Если $U_i(x, y, z) = U_i(P)$ — собственная функция уравнения (XXIV.19), а λ_i — его собственное значение, то искомые частные решения уравнения (XXIV.13) будут:

$$U_i(x, y, z) \cos \lambda_i t, \quad U_i(x, y, z) \sin \lambda_i t.$$

Решение интересующей нас задачи мы будем искать в виде ряда

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z) \cos \lambda_i t +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\infty} b_i U_i(x, y, z) \sin \lambda_i t + c_0 + c_1 t. \qquad \text{(XXIV.20)}$$

Потребуем, чтобы ряд (XXIV.20) удовлетворял начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z) + c_0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i U_i(x, y, z) + c_1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXIV.21)}$$

Если выбрать коэффициенты a_i и b_i так, чтобы иметь:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(x, y, z) = \varphi_0(x, y, z) - c_0,$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i U_i(x, y, z) = \varphi_1(x, y, z) - c_1,$$

то начальные условия (XXIV.14) будут выполнены. Предполагая опять систему функций U_i ортогональной и нормированной:

$$\iiint\limits_{\Omega} U_i(P) U_j(P)\, dP = \begin{cases} 1; & i = j, \\ 0; & i \neq j, \end{cases}$$

можем опять определить все коэффициенты рядов (XXIV.21), подобрав сначала постоянные c_0 и c_1 так, чтобы $\varphi_0 - c_0$ и $\varphi_1 - c_1$

были ортогональны к постоянной. Повторяя прежние рассуждения, получим:

$$a_i = \iiint\limits_{\Omega} \varphi_0 U_i \, dP, \quad \lambda_i b_i = \iiint\limits_{\Omega} \varphi_1 U_i \, dP.$$

Подобно предыдущему, убеждаемся сначала, что

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i U_i \cos \lambda_i t + \sum_{i=1}^{N} b_i U_i \sin \lambda_i t$$

есть решение задачи с приближёнными начальными условиями.

Переходя к пределу и пользуясь теоремой Рисса-Фишера, мы получим, что u_N в среднем сходится к некоторому обобщённому решению. Мы не будем более подробно исследовать, при каких обстоятельствах это решение будет решением в обычном смысле слова.

Ряд (XXIV.20) представляет интерес. Как мы видим, каждый член его представляет собой так называемое гармоническое колебание, причём частоты λ_i колебаний расположены дискретно.

§ 2. Аналогия между задачей о колебании непрерывной среды и колебаниями механических систем.

Легко проследить аналогию между рассмотренной задачей для уравнения (XXIV.13) и задачей о свободных малых колебаниях механических систем с конечным числом степеней свободы.

Эта последняя задача формулируется как задача об интегрировании системы уравнений:

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} q_k; \qquad j = 1, 2, \ldots, m \tag{XXIV.22}$$

при условиях:

$$q_j \big|_{t=0} = (q_j)_0, \qquad \frac{dq_j}{dt}\Big|_{t=0} = (q_j')_0,$$

причём предполагается, что $a_{ij} = a_{ji}$.

В такой системе вместо функции $u(P, t)$, зависящей от t и от переменной точки пространства, мы имеем величину, зависящую от t и от дискретного номера j. Если бы мы построили в области Ω сетку из конечного числа точек $P_1, P_2, \ldots, P_m$ и заменили бы рассмотрение функции $u(P, t)$ рассмотрением величин $q_j = u(P_j, t)$ в конечном числе, то мы могли бы, заменив в уравнении (XXIV.13) производные по координатам конечными разностями, получить систему, аналогичную (XXIV.22).

Решение системы (XXIV.22), как мы знаем из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет вид

$$q_j = \sum_{r=1}^{m} (c_{jr} \cos \lambda_r t + d_{jr} \sin \lambda_r t),$$

где λ_r—частоты колебаний, определяемые из так называемого векового уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda^2 & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda^2 & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разница между нашей задачей и задачей отыскания решения системы (XXIV.22) состоит лишь в том, что система (XXIV.22) имеет конечное число собственных частот колебаний, в то время как задача об интегрировании волнового уравнения имеет их бесконечно много. Эта аналогия идёт ещё глубже.

Если мы будем трактовать совокупность чисел $q_1, q_2, \ldots, q_m$ как некоторую точку в m-мерном пространстве или, точнее, как вектор $\mathbf{q}$, соединяющий начало с некоторой точкой этого пространства, то система уравнений (XXIV.22) запишется в виде

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = A\mathbf{q}, \tag{XXIV.23}$$

где A—линейная подстановка над вектором $\mathbf{q}$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что интегрирование (XXIV.23) сводится фактически к такой *ортогональной* замене переменных (преобразованию координат в пространстве q), чтобы матрица подстановки A была приведена к диагональной форме. Если эти новые координаты обозначить через $r_1, r_2, \ldots, r_m$, то после замены

$$q_j = \sum_{s=1}^{m} \beta_{js} r_s \tag{XXIV.24}$$

или

$$r_s = \sum_{j=1}^{m} \beta_{sj} q_j$$

мы будем иметь систему:

$$\frac{d^2r_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^{m} \bar{a}_{jk} r_k,$$

где

$$\bar{a}_{jk} = \begin{cases} -\lambda_j^2; & j = k, \\ 0; & j \neq k. \end{cases}$$

Введённое нами в случае волнового уравнения рассмотрение собственных функций

$$U_1, U_2, \ldots, U_m$$

совершенно аналогично такому новому выбору координат. Вместо значений какой-нибудь функции $f(P, t)$ во всевозможных точках P мы будем считать эту функцию заданной своими коэффициентами $f_i(t)$ разложения в ряд:

$$f(P, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) U_i(P). \qquad \text{(XXIV.25)}$$

Формула (XXIV.25) вместе с

$$f_i(t) = \iiint_{\Omega} f(P, t) U_i(P)\, dP \qquad \text{(XXIV.26)}$$

аналогична формулам (XXIV.24), только значок i в формулах (XXIV.25) и (XXIV.26), соответствующий значку s в формулах (XXIV.24), меняется не от 1 до m, а от 1 до бесконечности, а роль значка j из формул (XXIV.24), менявшегося от 1 до m, играет точка P, меняющаяся в области Ω.

Эта точка зрения даёт новый взгляд на самый метод Фурье для решения задачи об интегрировании волнового уравнения (XXIV.13) с предельными и начальными условиями.

Совпадение, отмеченное нами, разумеется, не является случайным. По существу, как одна, так и другая задачи представляют собой частные случаи некоторой общей задачи, формулируемой в терминах абстрактной теории уравнений в функциональных пространствах.

§ 3. Неоднородное уравнение

Не углубляя вопроса, мы будем пользоваться существующей аналогией, указанной в § 2, расширяя её далее. Мы проиллюстрируем эту аналогию на задаче об интегрировании волнового уравнения со свободным членом и нулевыми начальными данными. К этой задаче, как мы видели, сводится самый общий случай.

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

и попытаемся найти его решение, удовлетворяющее условиям

$$u\,\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,$$

$$\frac{du}{dn}\Big|_S = 0.$$

Отыскивая u в виде ряда

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\,U_i + c_0(t) \qquad \text{(XXIV.27)}$$

(всякая дважды дифференцируемая функция u, удовлетворяющая условию $\frac{du}{dn}\Big|_S = 0$, в такой ряд разлагается) и представляя F в виде такого же ряда [1]), получим:

$$c_0''(t) + \Delta\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\,U_i\right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\,U_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(t)\,U_i + F_0(t).$$

Произведём дифференцирование под знаком суммы. Это дифференцирование законно, если допустить, что ряды из производных равномерно сходятся. Тогда мы будем иметь:

$$c_0''(t) - F_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} U_i\left[-\lambda_i a_i(t) - a_i''(t) - F_i(t)\right] = 0.$$

Умножая обе части последнего равенства на U_j, интегрируя и замечая, что при этом все члены, кроме того, который имел

---

[1]) Функция F, вообще говоря, не удовлетворяет краевым условиям. Однако она, очевидно, может быть заменена функцией F', удовлетворяющей этим условиям, и такой, что $\iiint\limits_{\Omega} (F' - F)^2 dx\,dy\,dz < \varepsilon$. На основании рассуждений предыдущей лекции, такого рода замена повлечёт за собой сколь угодно малую ошибку в решении.

номер j, пропадут, получим для определения $a_j(t)$ дифференциальное уравнение:

$$a_j''(t)+\lambda_j^2 a_j(t)+F_j(t)=0. \qquad \text{(XXIV.28)}$$

Мы также получим

$$c_0''(t)-F_0(t)=0.$$

Пользуясь формулой Коши для решения обыкновенных уравнений, имеем:

$$a_i(t)=\frac{1}{\lambda_i}\int_0^t \sin[\lambda_i(t-t_1)]\,F_i(t_1)\,dt_1,$$

$$c_0(t)=\int_0^t (t-t_1)\,F_0(t_1)\,dt_1.$$

При таких $a_i(t)$ формула (XXIV.27) даст нам искомое решение, если только ряд (XXIV.27) окажется равномерно сходящимся со своими производными до 2-го порядка. Чтобы избежать исследования сходимости, мы можем опять заменить свободный член F функцией F_N—отрезком ряда Фурье. Переходя затем к пределу, мы получим, пользуясь теоремой Рисса-Фишера, если не решение в обычном смысле слова, то обобщённое решение.

Наша подстановка (XXIV.27) есть аналог замены переменных в системе (XXIV.23), приводившей эту последнюю к каноническому виду. Так же как и для (XXIV.23), она быстро решает задачу.

Очень легко указать также путь к решению задачи об интегрировании уравнения теплопроводности с правой частью и неоднородными условиями на границе:

$$\Delta u-\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}=F(P,t),$$

$$u|_S=f(S,t),$$

$$u|_{t=0}=\varphi(P).$$

Достаточно заметить, что эта задача может быть сведена к задаче интегрирования того же уравнения при условиях

$$u|_S=0,$$

$$u|_{t=0}=0.$$

Разложим свободный член в ряд вида

$$F(P, t) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i(P) F_i(t). \tag{XXIV.29}$$

Такое разложение возможно, так как при фиксированном значении t функция $F(P, t)$ разложима в ряд вида (XXIV.29). Коэффициенты этого ряда, вообще говоря, зависят от t:

$$F_i(t) = \iiint\limits_{\Omega} U_i(P) F(P, t)\, dP. \tag{XXIV.30}$$

$F_i(t)$ суть непрерывные дифференцируемые функции, как это видно из формулы (XXIV.30).

Отыскивая решение уравнения

$$\Delta u_N - \frac{1}{a}\frac{\partial u_N}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} F_i(t) U_i(P) \tag{XXIV.31}$$

в виде

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i(t) U_i(P),$$

получим:

$$\sum_{i=1}^{N} U_i(P) \left\{ F_i(t) + \frac{1}{a} a_i'(t) + \lambda_i a_i(t) \right\} = 0,$$

откуда, умножая на U_j и интегрируя, видим, что коэффициенты $a_i(t)$ должны удовлетворять уравнению:

$$\frac{1}{a} a_i'(t) + \lambda_i a_i(t) + F_i(t) = 0. \tag{XXIV.32}$$

Взяв за $a_i(t)$ то решение (XXII.32), которое обращается в нуль при $t = 0$, т. е.

$$a_i = \int_0^t e^{a\lambda_i(t_1 - t)} F_i(t)\, dt,$$

мы увидим, что $u_N(t)$ будет удовлетворять как уравнению (XXIV.31), так и поставленным начальным и граничным условиям.

Переходя затем к пределу при $N \to \infty$ и замечая, что правая часть (XXIV.31) стремится к функции F, получим, рассуждая подобно прежнему, обобщённое решение, которое при достаточной гладкости F будет решением в обычном смысле слова [см. § 2 (XXIII)].

В практических задачах часто наибольший интерес при решении волнового уравнения представляет как раз отыскание всех частот λ_i или, как говорят, спектра собственных частот колебаний. Знание такого спектра позволяет избежать неприятного явления резонанса.

Резонансом называется такое явление, когда амплитуды колебаний, возникающих под действием внешней силы, быстро возрастают с течением времени. Резонанс возникает большей частью тогда, когда внешняя сила изменяется по синусоидальному закону и частота её совпадает с собственной частотой колебаний.

Пусть, например, в формуле (XXIV.28)

$$F_i(t) = \sin \lambda_i(t);$$

тогда

$$a_i(t) = \frac{1}{\lambda_i}\int\limits_0^t \sin\lambda_i(t - t_1)\sin\lambda_i t_1\,dt_1 =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_i}\int\limits_0^t [\cos\lambda_i(2t_1 - t) - \cos\lambda_i t]\,dt_1 =$$

$$= -\frac{t}{2\lambda_i}\cos\lambda_i t + \frac{1}{2\lambda_i^2}\sin\lambda_i t.$$

Как видно, $a_i(t)$ неограниченно растёт вместе с t.

§ 4. Продольные колебания стержня со свободными концами.

Кроме разобранных нами случаев применения метода Фурье мы могли бы указать ещё много других.

Естественно, например, изучать таким образом уравнение:

$$p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)\frac{\partial u}{\partial x} + r(x)u = \rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} + F(x, t),$$

или

$$p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)\frac{\partial u}{\partial x} + r(x)u = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F(x, t),$$

при условиях для u в момент $t = t_0$ и на концах промежутка $0 \leqslant x \leqslant 1$ и ряд других.

Не вдаваясь в детали, рассмотрим один простейший пример применения изложенной теории.

Изучим решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

при условиях

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad \text{(XXIV.33)}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0. \qquad \text{(XXIV.34)}$$

Эта задача возникает, например, при изучении продольных колебаний стержня, свободного по обоим концам.

Согласно изложенному методу, решение следует искать в виде ряда

$$U = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t)\, U_j(x) + c_0 + c_1 t,$$

где $U_j(x)$ суть решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 U_j}{dx^2} + \lambda_j^2 U_j = 0. \qquad \text{(XXIV.35)}$$

В нашем случае нет надобности прибегать к помощи интегрального уравнения для отыскания решения уравнения (XXIV.35), удовлетворяющего граничным условиям:

$$\frac{dU_j}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dU_j}{dx}\Big|_{x=1} = 0.$$

Общее решение уравнения (XXIV.35) будет:

$$U_j = c_j \cos(\lambda_j x) + d_j \sin(\lambda_j x),$$

если $\lambda_j^2 > 0$, или

$$U_j = c_j \operatorname{ch}(i\lambda_j x) + d_j \operatorname{sh}(i\lambda_j x),$$

если $\lambda_j^2 < 0$.

Из общей теории интегральных уравнений с симметрическим ядром вытекает, что комплексных λ_j^2 быть не может.

В обоих случаях

$$\frac{dU_j}{dx} = \lambda_j(-c_j \sin(\lambda_j x) + d_j \cos(\lambda_j x_j))$$

$$\frac{dU_j}{dx} = \lambda_j(c_j \operatorname{sh}(i\lambda_j x) + d_j \operatorname{ch}(i\lambda_j x)).$$

Первое из граничных условий заставляет считать $d_j=0$ в обоих случаях, а второе условие приводит к заключению, что мнимые значения λ_j (т. е. отрицательные для λ_j^2) невозможны.

Таким образом,

$$U_j = c_j \cos \lambda_j x, \quad \frac{dU_j}{dx} = -\lambda_j c_j \sin \lambda_j x.$$

Пользуясь вторым граничным условием, заключаем, что

$$\sin \lambda_j = 0,$$

откуда

$$\lambda_j = j\pi$$

и

$$U_j = c_j \sin (j\pi x).$$

Известны формулы:

$$\int_0^1 \cos (j\pi x) \cos (k\pi x)\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2}; & j = k, \\ 0; & j \neq k. \end{cases}$$

Если выбрать теперь $c_j = \sqrt{2}$, то мы получим искомую систему ортогональных нормированных функций U_j в виде

$$U_j = \sqrt{2} \cos j\pi x.$$

Коэффициенты a_j и b_j получим в виде

$$a_j = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi_0(x) \cos (j\pi x)\, dx,$$

$$b_j = \frac{\sqrt{2}}{\pi j} \int_0^1 \varphi_1(x) \cos (j\pi x)\, dx,$$

и окончательный ответ в виде ряда

$$u = \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos (j\pi x) + b_j \sin (j\pi x) + c_0 + c_1 t,$$

где

$$c_0 = \int_0^1 \varphi_0(x)\, dx, \quad c_1 = \int_0^1 \varphi_1(x)\, dx.$$

Как мы видим, частоты собственных колебаний такого стержня будут иметь вид

$$\pi j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Для того чтобы закончить изложение метода Фурье, мы сделаем ещё несколько замечаний общего характера. В наших рассуждениях существенную роль играло то обстоятельство, что рассматриваемые задачи обладали дискретным спектром и числа λ_i не сгущались нигде. Поэтому в формулах (XXIV.25) и (XXIV.26), которые мы рассматривали как аналог линейных преобразований n чисел, одно из переменных—значок i принимал лишь счётное множество значений. Как выясняется при детальном исследовании, это обстоятельство тесно связано с фактом ограниченности области Ω. Те свойства интегральных уравнений с симметрическим ядром, на которые мы опирались, могут потеряться, если область будет неограниченной.

При этом может случиться, например, что таких ортогональных нормированных собственных функций не существует. Они заменяются при этом целым множеством функций $U(P, \xi)$, зависящим от непрерывно меняющегося параметра ξ вещественного или комплексного. Спектр таких задач может быть или сплошным или представлять собою множество со сложными структурными свойствами. Этих вопросов мы в настоящем курсе касаться не будем.

ЛЕКЦИЯ XXV.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЧЕСКИМ ЯДРОМ.

§ 1. Простейшие свойства. Вполне непрерывные операторы.

Мы видели выше, что задача об отыскании собственных значений и собственных функций для многих задач математической физики приводится, при помощи функции Грина, к задаче о собственных значениях и собственных функциях некоторого интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода с симметрическим ядром, т. е. таким ядром, что

$$K(P, P_0) = K(P_0, P).$$

Мы будем изучать несколько более общее интегральное уравнение, а именно:

$$\varphi(P_0) = f(P_0) + \lambda \int_{\Omega} K(P_0, P)\varphi(P)\rho(P)\,dP; \qquad \text{(XXV.1)}$$

и соответствующее однородное уравнение:

$$\varphi(P_0) = \lambda \int_{\Omega} K(P_0, P)\varphi(P)\rho(P)\,dP \qquad \text{(XXV.2)}$$

где $K(P_0, P)$ — симметрическая функция координат точек P_0 и P, а $\rho(P)$ — неотрицательная функция, называемая весом (или нагрузкой).

В случае $\rho = 1$ мы получаем интегральные уравнения с симметрическим ядром.

Для рассматриваемых интегральных уравнений и в частности для интегральных уравнений с симметрическим ядром имеет место целый ряд важных предложений, к изучению которых мы и перейдём.

Мы будем говорить, что уравнение (XXV.1) имеет *нагруженное симметрическое ядро* или *симметрическое ядро с нагрузкой* $\rho(P)$.

Лемма 1. Пусть $\varphi(P)$ и $\psi(P_0)$ — две произвольные функции, вещественные или комплексные [1]), интегрируемые с квадратом модуля с весом $\rho(P)$ в ограниченной области Ω, т. е.

$$\int_\Omega |\varphi(P)|^2 \rho(P)\,dP < \infty, \quad \int_\Omega |\psi(P_0)|^2 \rho(P_0)\,dP_0 < \infty.$$

И пусть вещественное ядро [2]) $K(P, P_0)$ удовлетворяет неравенству:

$$|K(P, P_0)| \leqslant \frac{A}{r^\alpha},$$

где r — расстояние между точками P и P_0, а $\alpha < n$. Тогда интеграл

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(P, P_0)\varphi(P)\psi(P_0)|\rho(P)\rho(P_0)\,dP\,dP_0 \qquad \text{(XXV.3)}$$

сходится. (Вес $\rho(P)$ предполагается неотрицательной интегрируемой функцией.)

Оценивая интеграл (XXV.3) при помощи неравенства Буняковского-Шварца, получим:

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(P, P_0)\varphi(P)\psi(P_0)|\rho(P)\rho(P_0)\,dP\,dP_0 \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_\Omega |\varphi(P)|^2 \rho(P)\,dP}\sqrt{\int_\Omega \left\{\int_\Omega |K(P, P_0)\psi(P_0)|\rho(P_0)\,dP_0\right\}^2 \rho(P)\,dP}.$$

Если мы установим сходимость интеграла:

$$\int_\Omega \left\{\int_\Omega |K(P, P_0)\psi(P_0)|\rho(P_0)\,dP_0\right\}^2 \rho(P)\,dP, \qquad \text{(XXV.4)}$$

то отсюда будет вытекать наша лемма.

---

[1]) Под комплексной функцией вещественного аргумента (или вещественных аргументов) $\varphi(P)$ мы понимаем функцию, представляемую так:

$$\varphi(P) = \varphi_1(P) + i\varphi_2(P),$$

где $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ — вещественные функции.

[2]) Ядро $K(P, P_0)$ не предполагается симметричным.

Имеем:

$$\int_{\Omega} |K(P, P_0)\psi(P_0)|\rho(P_0)\,dP_0 \leqslant \int_{\Omega} \frac{A}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|\rho(P_0)\,dP_0 =$$

$$= A\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{r^{\frac{\alpha}{2}}}|\psi(P_0)|\rho(P_0)\,dP_0 \leqslant$$

$$\leqslant A\sqrt{\int_{\Omega} \frac{\rho(P_0)}{r^{\alpha}}\,dP_0}\sqrt{\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\,dP_0},$$

но

$$A^2\int_{\Omega} \frac{\rho(P_0)\,dP_0}{r^{\alpha}} \leqslant M, \qquad \text{(XXV.5)}$$

где M — некоторая постоянная.

Таким образом,

$$\left[\int_{\Omega} |K(P, P_0)\psi(P_0)|\rho(P_0)\,dP_0\right]^2 \leqslant M\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\,dP_0.$$

Следовательно, интеграл (XXV.4) будет сходиться, если будет сходиться интеграл:

$$\int_{\Omega}\left[\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\,dP_0\right]\rho(P)\,dP. \qquad \text{(XXV.6)}$$

Чтобы установить сходимость этого последнего интеграла, будем совершать интегрирование в другом порядке:

$$\int_{\Omega}\left[|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\alpha}}\rho(P)\,dP\right]dP_0. \qquad \text{(XXV.7)}$$

В силу (XXV.5) подинтегральная функция меньше, чем $B|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)$, где B — постоянная; следовательно, интеграл (XXV.7) меньше, чем

$$B\int_{\Omega} |\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\,dP_0,$$

который сходится по условию леммы; значит, сходится и интеграл (XXV.5); лемма доказана.

Следствие.

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(P) \left\{ \int\limits_{\Omega} K(P, P_0)\, \psi(P_0)\, \rho(P_0)\, dP_0 \right\} \rho(P)\, dP =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \psi(P_0) \left\{ \int\limits_{\Omega} K(P, P_0)\, \varphi(P)\, \rho(P)\, dP \right\} \rho(P_0)\, dP_0.$$

Доказательство следует из добавления к теореме Лебега-Фубини (см. лекцию VI).

Введём следующие обозначения:

$$\int\limits_{\Omega} K(P, P_0)\, \varphi(P)\, \rho(P)\, dP = A\varphi \qquad \text{(XXV.8)}$$

$$\int\limits_{\Omega} K(P, P_0)\, \psi(P_0)\, \rho(P_0)\, dP_0 = A^*\psi. \qquad \text{(XXV.9)}$$

Заметим, что в случае симметричности функции $K(P, P)$, оператор A совпадает с оператором A^*. Пусть также

$$(\varphi\bar{\psi}) = \int\limits_{\Omega} \varphi(P)\, \psi(P)\, \rho(P)\, dP, \qquad \text{(XXV.10)}$$

где $\bar{\psi}$ обозначает комплексно сопряжённую функцию с ψ.

Отметим некоторые свойства этих символов:

1. $A(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 A\varphi_1 + a_2 A\varphi_2$.
2. $(\varphi, a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = \bar{a}_1(\varphi, \psi_1) + \bar{a}_2(\varphi, \psi_2)$.
3. $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1(\varphi_1, \psi) + a_2(\varphi_2, \psi)$.
4. $(\varphi, \bar{\psi}) = \overline{(\bar{\varphi}, \psi)}$.
5. $(\varphi, \bar{\psi}) = (\psi, \bar{\varphi})$.

Здесь a_1 и a_2 — некоторые постоянные.

Справедливость всех наших равенств устанавливается непосредственной проверкой.

Наше следствие может быть записано в форме

$$(\varphi, \overline{A^*\psi}) = (A\varphi, \bar{\psi}). \qquad \text{(XXV.11)}$$

Для случая вещественной и симметрической функции $K(P, P_0)$ и вещественных φ и ψ будем иметь $(\varphi, A\psi) = (A\varphi, \psi)$.

Переходим к изучению интегральных уравнений. Изучим прежде всего однородные уравнения.

Условимся в дальнейшем рассматривать только такие собственные функции, у которых квадрат модуля интегрируем.

Имеем:

$$\int_{\Omega} |K(P, P_0)\psi(P_0)|\rho(P_0)\,dP_0 \leqslant \int_{\Omega} \frac{A}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|\rho(P_0)\,dP_0 =$$

$$= A\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{r^{\frac{\alpha}{2}}}|\psi(P_0)|\rho(P_0)\,dP_0 \leqslant$$

$$\leqslant A\sqrt{\int_{\Omega} \frac{\rho(P_0)}{r^{\alpha}}\,dP_0}\sqrt{\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\,dP_0},$$

но

$$A^2\int_{\Omega} \frac{\rho(P_0)\,dP_0}{r^{\alpha}} \leqslant M, \qquad (XXV.5)$$

где M — некоторая постоянная.

Таким образом,

$$\left[\int_{\Omega} |K(P, P_0)\psi(P_0)|\rho(P_0)\,dP_0\right]^2 \leqslant M\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\,dP_0.$$

Следовательно, интеграл (XXV.4) будет сходиться, если будет сходиться интеграл:

$$\int_{\Omega}\left[\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\alpha}}|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\,dP_0\right]\rho(P)\,dP. \qquad (XXV.6)$$

Чтобы установить сходимость этого последнего интеграла, будем совершать интегрирование в другом порядке:

$$\int_{\Omega}\left[|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\int_{\Omega} \frac{1}{r^{\alpha}}\rho(P)\,dP\right]dP_0. \qquad (XXV.7)$$

В силу (XXV.5) подинтегральная функция меньше, чем $B|\psi(P_0)|^2\rho(P_0)$, где B — постоянная; следовательно, интеграл (XXV.7) меньше, чем

$$B\int_{\Omega} |\psi(P_0)|^2\rho(P_0)\,dP_0,$$

который сходится по условию леммы; значит, сходится и интеграл (XXV.5); лемма доказана.

Следствие.

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(P)\left\{\int\limits_{\Omega} K(P, P_0)\psi(P_0)\rho(P_0)\,dP_0\right\}\rho(P)\,dP =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \psi(P_0)\left\{\int\limits_{\Omega} K(P, P_0)\varphi(P)\rho(P)\,dP\right\}\rho(P_0)\,dP_0.$$

Доказательство следует из добавления к теореме Лебега-Фубини (см. лекцию VI).

Введём следующие обозначения:

$$\int\limits_{\Omega} K(P, P_0)\varphi(P)\rho(P)\,dP = A\varphi \qquad \text{(XXV.8)}$$

$$\int\limits_{\Omega} K(P, P_0)\psi(P_0)\rho(P_0)\,dP_0 = A^*\psi. \qquad \text{(XXV.9)}$$

Заметим, что в случае симметричности функции $K(P, P)_0$ оператор A совпадает с оператором A^*. Пусть также

$$(\varphi\bar{\psi}) = \int\limits_{\Omega} \varphi(P)\psi(P)\rho(P)\,dP, \qquad \text{(XXV.10)}$$

где $\bar{\psi}$ обозначает комплексно сопряжённую функцию с ψ.

Отметим некоторые свойства этих символов:

1. $A(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 A\varphi_1 + a_2 A\varphi_2$.
2. $(\varphi, a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = \bar{a}_1(\varphi, \psi_1) + \bar{a}_2(\varphi, \psi_2)$.
3. $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1(\varphi_1, \psi) + a_2(\varphi_2, \psi)$.
4. $(\varphi, \bar{\psi}) = \overline{(\bar{\varphi}, \psi)}$.
5. $(\varphi, \bar{\psi}) = (\psi, \bar{\varphi})$.

Здесь a_1 и a_2 — некоторые постоянные.

Справедливость всех наших равенств устанавливается непосредственной проверкой.

Наше следствие может быть записано в форме

$$(\varphi, \overline{A^*\psi}) = (A\varphi, \bar{\psi}). \qquad \text{(XXV.11)}$$

Для случая вещественной и симметрической функции $K(P, P_0)$ и вещественных φ и ψ будем иметь $(\varphi, A\psi) = (A\varphi, \psi)$.

Переходим к изучению интегральных уравнений. Изучим прежде всего однородные уравнения.

Условимся в дальнейшем рассматривать только такие собственные функции, у которых квадрат модуля интегрируем.

Теорема 1. Если λ_1 и λ_2 суть два различных характеристических числа уравнений

$$\varphi = \lambda_1 A\varphi$$

и

$$\psi = \lambda_2 A^* \psi,$$

то собственные функции этих уравнений φ и ψ удовлетворяют соотношению

$$(\varphi\bar{\psi}) = 0. \qquad \text{(XXV.12)}$$

В самом деле,

$$(\varphi, \overline{A^*\psi}) = \left(\varphi, \overline{\frac{1}{\lambda_2}\psi}\right) = \frac{1}{\lambda_2}(\varphi, \bar{\psi}),$$

$$(A\varphi, \bar{\psi}) = \left(\frac{1}{\lambda_1}\varphi, \bar{\psi}\right) = \frac{1}{\lambda_1}(\varphi, \bar{\psi});$$

из (XXV.11) следует при этом

$$\lambda_2(\varphi, \bar{\psi}) = \lambda_1(\varphi, \bar{\psi}),$$

что возможно лишь, если $(\varphi, \bar{\psi}) = 0$, что и требовалось доказать.

Функции φ и ψ, удовлетворяющие (XXV.12), мы будем называть ортогональными с весом $\rho(P)$ или, когда это не поведёт к недоразумениям, ортогональными.

Следствие. Фундаментальные функции интегрального уравнения с нагруженным симметрическим ядром, соответствующие разным характеристическим числам, ортогональны. В самом деле, для симметрического ядра с нагрузкой все фундаментальные функции уравнения $\psi = \lambda A^* \psi$ просто превращаются в фундаментальные функции уравнения $\varphi = \lambda A\varphi$, ибо $A = A^*$.

Теорема 2. Вещественное нагруженное симметрическое ядро не может иметь комплексных характеристических чисел.

Пусть наше уравнение имеет характеристическое число λ_0 и фундаментальную функцию φ_0, т. е.

$$\varphi_0 = \lambda_0 A\varphi_0.$$

Взяв сопряжённые комплексные величины от обеих частей нашего уравнения и обращая внимание на то, что для вещественного ядра $K(P, P_0)$

$$\overline{A\varphi} = A\bar{\varphi},$$

получим:

$$\bar{\varphi}_0 = \bar{\lambda}_0 A\bar{\varphi}_0.$$

Отсюда следует, что $\bar{\lambda}_0$ и $\bar{\varphi}_0$ суть также характеристическое число и фундаментальная функция нашего уравнения.

Поскольку $\lambda_0 \neq \overline{\lambda}_0$, на основании следствия из теоремы 1 (XXV), видим, что φ_0 и $\overline{\varphi}_0$ должны быть ортогональны с весом ρ, т. е.

$$(\varphi_0, \overline{\varphi}_0) = \int\limits_{\Omega} \varphi_0(P)\, \overline{\overline{\varphi_0(P)}}\, \rho(P)\, dP = \int\limits_{\Omega} |\varphi_0(P)|^2 \rho(P)\, dP = 0;$$

значит, $\varphi_0 = 0$, что и противоречит предположению о том, что φ_0 есть нетривиальное решение уравнения:

$$\varphi = \lambda A \varphi.$$

Теорема 3. Все фундаментальные функции вещественного симметрического ядра сами вещественны.

(Точнее говоря, могут быть выбраны вещественными.)

Пусть

$$\varphi_0(P) = \alpha(P) + i\beta(P)$$

— фундаментальная функция. Подставляя её в уравнение, получим:

$$\varphi_0 = \alpha + i\beta = \lambda A \varphi_0 = \lambda A \alpha + i \lambda A \beta;$$

разделяя вещественную и мнимую части, получим:

$$\alpha = \lambda A \alpha, \quad \beta = \lambda A \beta.$$

Следовательно, α и β суть сами фундаментальные функции, и вместо φ_0 можно рассматривать именно обе эти функции; линейной комбинацией их будет наша φ_0.

Лемма 2. Все фундаментальные функции нагруженного симметрического ядра можно считать ортогональными с весом ρ.

В самом деле, неортогональными могли бы быть лишь фундаментальные функции, соответствующие одному и тому же характеристическому числу λ. Пусть эти функции будут, например, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$. Вместо них мы рассмотрим такие их линейные комбинации:

$$\psi_1 = \varphi_1,$$

$$\psi_2 = \varphi_2 - \frac{(\psi_1, \overline{\varphi}_2)}{(\psi_1, \overline{\psi}_1)} \psi_1,$$

$$\psi_3 = \varphi_3 - \frac{(\psi_1, \overline{\varphi}_3)}{(\psi_1, \overline{\psi}_1)} \psi_1 - \frac{(\psi_2, \overline{\varphi}_3)}{(\psi_2, \overline{\psi}_2)} \psi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_k = \varphi_k - \frac{(\psi_1, \overline{\varphi}_k)}{(\psi_1, \overline{\psi}_1)} \psi_1 - \frac{(\psi_2, \overline{\varphi}_k)}{(\psi_2, \overline{\psi}_2)} \psi_2 - \ldots - \frac{(\psi_{k-1}, \overline{\varphi}_k)}{(\psi_{k-1}, \overline{\psi}_{k-1})} \psi_{k-1}.$$

Методом полной индукции легко доказать, что каждая функция ψ_s ортогональна ко всем предыдущим, так как

$$(\psi_s, \overline{\psi_t}) = (\varphi_s, \overline{\psi_t}) - \frac{(\psi_1, \overline{\varphi_s})}{(\psi_1, \overline{\psi_1})}(\psi_1, \overline{\psi_t}) - \ldots - \frac{(\psi_{s-1}, \overline{\varphi_s})}{(\psi_{s-1}, \overline{\psi_{s-1}})}(\psi_{s-1}, \overline{\psi_t}).$$

В правой части все слагаемые нули, ибо $t < s$, кроме $(\varphi_s, \overline{\psi_t})$ и $-\frac{(\psi_t, \overline{\varphi_s})}{(\psi_t, \overline{\psi_t})}(\psi_t, \overline{\psi_t})$, которые взаимно уничтожаются. Очевидно, $\{\psi_k\}$ являются решениями однородного уравнения, что и требовалось доказать.

В дальнейшем мы будем предполагать, что вес ρ может равняться нулю лишь в отдельных точках (или на множестве меры нуль)

Определение. Мы будем говорить, что последовательность $\{\varphi_n\}$ функций, с интегрируемым квадратом модуля, сходится в среднем с весом ρ к функции, с интегрируемым квадратом модуля φ, если справедливо соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n - \varphi|^2 \rho \, dP = 0.$$

Заметим, что если последовательность $\{\varphi_n\}$ функций с интегрируемым квадратом равномерно сходится к φ, то эта последовательность сходится в среднем к φ. Однако обратное предложение, очевидно, не имеет места. Если отказаться от требования равномерной сходимости, то можно построить примеры всюду сходящихся последовательностей, которые в среднем не сходятся.

В лекции XXIII, § 7 мы встречались уже с понятием сходимости в среднем и доказали, что одна последовательность не может сходиться в среднем к двум различным функциям. Здесь мы только отметим. что если предполагать интегрируемость в смысле Лебега, то следует считать в упомянутом предложении, что функции различны только, если они отличаются друг от друга на множестве меры больше нуля.

Определение. Назовём некоторое множество функций компактным, если из любой его бесконечной части можно выбрать сходящуюся последовательность.

При разных требованиях, наложенных на сходимость, которая может быть сходимостью в среднем или равномерной сходимостью и т. п., мы получим и разные условия компактности.

Компактные множества функций по своему определению весьма близко напоминают ограниченные множества точек. Ясно, что любая бесконечная часть ограниченного множества точек сама есть ограниченное бесконечное множество и поэтому имеет хоть одну предельную точку, а значит, и последовательность, сходящуюся к этой точке.

Множество, состоящее из ограниченных равностепенно непрерывных функций, будет компактным [1]), если рассматривается равномерная сходимость или, тем более, сходимость в среднем.

В самом деле, по теореме Arzela [2]) любое такое бесконечное множество имеет хоть одну предельную функцию, т. е. содержит равномерно сходящуюся последовательность. Разумеется, при этом сходимость в среднем также имеет место, если область задания функций ограничена, что мы и будем предполагать. Очевидно, что множество функций, компактное для равномерной сходимости, компактно и для сходимости в среднем.

Будем называть множество функций $\{\varphi\}$ ограниченным в среднем, с весом $\rho(P)$, если оно удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\Omega} |\varphi|^2 \rho \, dP \leqslant A.$$

Определение. Назовём *вполне непрерывным* оператором такой оператор $A\varphi$, который, будучи применён ко всем функциям некоторого ограниченного в среднем множества $\{\varphi\}$, превращает его в компактное множество *в смысле сходимости в среднем*. Если множество $A\varphi$ будет компактным в смысле *равномерной сходимости*, то оператор A мы будем называть *усиленно вполне непрерывным*.

Теорема 4. Интегральный оператор

$$A\varphi = \int\limits_{\Omega} K(P, P_0) \varphi(P) \rho(P) \, dP,$$

где функция $K(P, P_0)$ непрерывна, а $\rho(P)$ — интегрируемая функция, есть усиленно вполне непрерывный оператор.

Мы докажем даже несколько более сильное утверждение. Пусть $\{\varphi\}$ — множество функций, ограниченное в среднем

$$\int\limits_{\Omega} |\varphi|^2 \rho \, dP < A.$$

Докажем, что семейство $\{A\varphi\}$ равностепенно непрерывно. Пусть

$$\omega = A\varphi.$$

---

[1]) См. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 4-е изд., глава II, § 2, стр. 64, или Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, § 11.

[2]) См. там же.

Составим разность

$$\omega(P_1)-\omega(P_2)=\int\limits_{\Omega}[K(P,P_1)-K(P,P_2)]\,\varphi(P)\,\rho(P)\,dP,$$

$$|\omega(P_1)-\omega(P_2)|^2\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega}|\varphi(P)|^2\rho(P)\,dP\int\limits_{\Omega}|K(P,P_1)-K(P,P_2)|^2\rho(P)\,dP.$$

Выберем точку P_2 столь близко к P_1, чтобы иметь

$$|K(P,P_1)-K(P,P_2)|<\varepsilon.$$

Это возможно, так как ядро $K(P,P_0)$ непрерывно в замкнутой области изменения переменных (P,P_0) и по известной теореме будет там равномерно непрерывно. При этом

$$|\omega(P_1)-\omega(P_2)|^2\leqslant A\int\limits_{\Omega}\varepsilon^2\rho(P)\,dP=\varepsilon^2AB,$$

где $B=\int\limits_{\Omega}\rho(P)\,dP$.

Мы видим, таким образом, что разность $|\omega(P_1)-\omega(P_2)|$ может быть сделана меньше любого наперёд заданного числа при P_1, достаточно близком к P_2, одновременно для всех $\omega=A\varphi$, так как в нашу оценку не вошли индивидуальные свойства функции φ. Следовательно, семейство $\{A\varphi\}$ равностепенно непрерывно. Ограниченность его очевидна, ибо

$$|\omega|^2\leqslant\int\limits_{\Omega}|\varphi|^2\rho\,dP\int\limits_{\Omega}|K(P,P_0)|^2\rho(P)\,dP\leqslant AM^2B,$$

где

$$M>|K(P,P_0)|.$$

Отсюда следует компактность этого семейства в смысле равномерной сходимости и, тем более, в смысле сходимости в среднем.

Мы выясним далее, что свойство оператора быть вполне непрерывным есть чрезвычайно важное свойство, ибо именно из него будут следовать все остальные теоремы для уравнений с нагруженным симметрическим ядром.

Можно доказать, что вся качественная сторона теории Фредгольма для несимметрических ядер, т. е. альтернатива Фредгольма условия разрешимости уравнений и т. д., целиком переносится на уравнения

$$\varphi=\lambda A\varphi+f$$

с вполне непрерывным оператором A. Однако мы не будем останавливаться на этом вопросе.

§ 2. Существование собственного значения.

Теорема 5. Если вещественная симметрическая функция $K(P, P_0)$ непрерывна и не равна тождественно нулю, функция $\rho(P)$ интегрируема, неотрицательна и также не равна тождественно нулю, то интегральное уравнение

$$\varphi = \lambda A\varphi \tag{XXV.13}$$

имеет по крайней мере одно фундаментальное число.

Доказательство. Очевидно достаточно установить существование собственного значения у уравнения:

$$\varphi = \mu A^2\varphi \tag{XXV.14}$$

с повторным ядром, так как из доказанной нами ранее леммы (XIX, лемма 2) следует, что если μ_1 — собственное значение (XXV.14), то либо

$$\lambda_1 = +\sqrt{\mu_1},$$

либо

$$\lambda_1 = -\sqrt{\mu_1}$$

есть собственное значение (XXV.13), так как φ_0, удовлетворяющая уравнению (XXV.14), есть решение одного из уравнений:

$$\varphi = \sqrt{\mu} A\varphi, \quad \varphi = -\sqrt{\mu} A\varphi,$$

или линейная комбинация таких решений.

Рассмотрим выражение

$$\frac{(A\varphi, A\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \frac{(\varphi, A^2\varphi)}{(\varphi, \varphi)}$$

для всевозможных функций φ, вещественных и интегрируемых с квадратом.

Это отношение не может равняться нулю для всех φ, ибо иначе $A\varphi$ было бы тождественным нулём. Очевидно, что оно не отрицательно.

Оно не может, кроме того, принимать неограниченно больших значений, так как

$$(A\varphi, A\varphi) = \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega K(P, P_0)\varphi(P)\rho(P)\,dP \right)^2 \rho(P_0)\,dP_0 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega \left\{ \int\limits_\Omega [K(P, P_0)]^2 \rho(P)\,dP \int\limits_\Omega [\varphi(P)]^2 \rho(P)\,dP \right\} \rho(P_0)\,dP_0 =$$

$$= (\varphi, \varphi) \int\limits_\Omega \left\{ \int\limits_\Omega [K(P, P_0)]^2 \rho(P_0)\,dP_0 \right\} \rho(P)\,dP = (\varphi, \varphi) M, \tag{XXV.15}$$

где

$$M = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} [K(P, P_0)]^2 \rho(P) \rho(P_0)\, dP\, dP_0.$$

Следовательно, выражение $\frac{(A\varphi, A\varphi)}{(\varphi, \varphi)}$ имеет точную верхнюю границу, которую мы обозначим через $\varkappa_1$.

При этом, очевидно,

$$\frac{(A^2\varphi, A^2\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \frac{(A^2\varphi, A^2\varphi)}{(A\varphi, A\varphi)} \frac{(A\varphi, A\varphi)}{(\varphi, \varphi)} \leqslant \varkappa_1^2. \qquad \text{(XXV.16)}$$

Пусть φ_n — последовательность функций, таких, что

$$(\varphi_n, \varphi_n) = 1 \qquad \text{(XXV.17)}$$

и что

$$\lim_{n\to\infty} (A\varphi_n, A\varphi_n) = \varkappa_1. \qquad \text{(XXV.18)}$$

Такую последовательность всегда можно построить. По свойству верхней границы существует последовательность φ_n^*, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(A\varphi_n^*, A\varphi_n^*)}{(\varphi_n^*, \varphi_n^*)} = \varkappa_1.$$

Полагая затем

$$\varphi_n = \frac{\varphi_n^*}{\sqrt{(\varphi_n^*, \varphi_n^*)}},$$

получим искомую последовательность.

Рассмотрим последовательность

$$\psi_n = \varkappa_1\varphi_n - A^2\varphi_n.$$

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} (\psi_n, \psi_n) = 0. \qquad \text{(XXV.19)}$$

В самом деле,

$$(\psi_n, \psi_n) = \varkappa_1^2 (\varphi_n, \varphi_n) - 2\varkappa_1 (\varphi_n, A^2\varphi_n) + (A^2\varphi_n, A^2\varphi_n).$$

В силу (XXV.16) имеем:

$$(\psi_n, \psi_n) \leqslant 2\varkappa_1^2 - 2\varkappa_1 (\varphi_n, A^2\varphi_n) = 2\varkappa_1 (\varkappa_1 - (A\varphi_n, A\varphi_n)).$$

Пользуясь (XXV.18), убеждаемся в справедливости (XXV.19). Изучим теперь последовательность

$$\chi_n = A\varphi_n$$

и пусть

$$\omega_n = A\psi_n = \varkappa_1 A\varphi_n - A^3\varphi_n = \varkappa_1 A\varphi_n - A^2(A\varphi_n).$$

Благодаря усиленной полной непрерывности оператора A, из $\{\chi_n\}$ всегда можно выбрать равномерно сходящуюся последовательность.

Предположим, что это уже сделано и что χ_n равномерно сходится к χ_0. Ясно, что $\chi_0 \neq 0$, ибо $(\chi_0, \chi_0) = \varkappa_1$. При этом, очевидно, ω_n будет сходиться к функции $\omega_0 = \varkappa_1\chi_0 - A^2\chi_0$. Благодаря (XXV.15) мы видим, что

$$(\omega_n, \omega_n) \leqslant (\psi_n, \psi_n) M$$

и, значит, (ω_n, ω_n) стремится к нулю. Поэтому предельная функция

$$\omega_0 = \lim_{n\to\infty} \omega_n$$

удовлетворяет условию

$$(\omega_0, \omega_0) = 0.$$

Следовательно, ω_0 тождественно равна нулю.

Значит функция χ_0 удовлетворяет уравнению:

$$\varkappa_1\chi_0 - A^2\chi_0 = 0,$$

или, полагая

$$\varkappa_1 = \frac{1}{\mu_1},$$

уравнению:

$$\chi_0 - \mu_1 A^2\chi_0 = 0.$$

Следовательно, уравнение (XXV.14) имеет собственное значение μ_1, что и требовалось доказать.

Теорема 6. Интегральное уравнение

$$\varphi = \lambda A\varphi, \tag{XXV.20}$$

ядро которого вещественно, симметрично с нагрузкой ρ и удовлетворяет неравенству:

$$|K(P, P_0)| < \frac{A}{r^{n-\alpha}}, \quad \alpha > 0,$$

имеет по крайней мере одно собственное значение.

Доказательство. Повторные ядра K_m, начиная с некоторого номера $m > N$, непрерывны [см. лемму 1 (XIX)]. По теореме (XXV.15) интегральное уравнение

$$\varphi = \mu A^{2k+1}\varphi, \qquad \text{при } 2k + 1 > N,$$

имеет по крайней мере одно собственное значение μ и собственную функцию φ_0.

Эта функция удовлетворяет одному из уравнений

$$\varphi_0 = \varepsilon_s \sqrt[2k+1]{\mu_1}\, A\varphi_0, \tag{XXV.21}$$

где ε — первообразный корень степени $2k+1$ из единицы или представляет собою линейную комбинацию решений таких уравнений. Но ни при каком комплексном ε^s, т. е. ни при каком s, отличном от нуля, уравнение (XXV.21) не может иметь нетривиальных решений, так как иначе уравнение (XXV.21) с симметрическим нагруженным ядром имело бы комплексное собственное значение, что, очевидно, невозможно. Значит, φ_0 удовлетворяет уравнению

$$\varphi_0 = \sqrt[2k+1]{\mu_1}\, A\varphi_0,$$

т. е., полагая $\sqrt[2k+1]{\mu_1} = \lambda_1$, имеем:

$$\varphi_0 = \lambda_1 A\varphi_0.$$

Значит λ_1 есть собственное значение (XXV.20), что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ XXVI.

БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМУЛА И ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА-ШМИДТА.

§ 1. Билинейная формула.

Рассматривая интегральное уравнение с симметрическим нагруженным ядром

$$\varphi = \lambda A\varphi, \tag{XXVI.1}$$

мы доказали в прошлой лекции, что уравнение это всегда имеет фундаментальную функцию φ и характеристическое число λ_1. Умножая эту функцию на постоянную, добьёмся того, чтобы иметь

$$\int\limits_{\Omega} [\varphi_1(P)]^2 \rho(P)\, dP = 1.$$

Введём теперь новый интегральный оператор $B_1\varphi$, определяемый условиями:

$$B_1\varphi = \psi(P_0) = \frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(P_0)\int\limits_{\Omega}\varphi_1(P)\varphi(P)\rho(P)\, dP.$$

Очевидно, ядром операции B_1 служит

$$L(P, P_0) = \frac{\varphi_1(P_0)\varphi_1(P)}{\lambda_1}.$$

Уравнение

$$\varphi = \lambda B_1\varphi \tag{XXVI.2}$$

имеет, очевидно, одно собственное значение λ_1 и одну фундаментальную функцию φ_1. В самом деле, $B_1\varphi$ всегда отличается лишь множителем от φ_1, следовательно, решением уравнения (XXVI.2) может при любом λ служить только $\varphi_1(P)$.

Подставляя это в (XXVI.2), получим:

$$\varphi_1(P) = \frac{\lambda}{\lambda_1}\varphi_1(P),$$

откуда

$$\lambda = \lambda_1.$$

Лемма. Интегральное уравнение

$$\varphi = \lambda (A - B_1) \varphi \tag{XXVI.3}$$

с ядром

$$K - L = K(P, P_0) - \frac{\varphi_1(P)\varphi_1(P_0)}{\lambda_1} \tag{XXVI.4}$$

имеет всё те же фундаментальные функции, что и уравнение (XXVI.1), и при тех же самых значениях λ, за исключением φ_1, и не имеет никаких новых фундаментальных функций по сравнению с уравнением (XXVI.1).

Доказательство. Пусть φ_k $(k \neq 1)$ есть некоторое решение уравнения (XXVI.1), соответствующее собственному значению λ_k. Тогда

$$B_1\varphi_k = 0$$

в силу того, что все фундаментальные функции уравнения (XXVI.1) ортогональны. Значит,

$$(A - B_1)\varphi_k = A\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k,$$

т. е.

$$\varphi_k = \lambda_k (A - B_1)\varphi_k.$$

Далее,

$$\lambda (A - B_1)\varphi_1 = 0.$$

Следовательно, все решения уравнения (XXVI.1), кроме φ_1, удовлетворяют уравнению (XXVI.3) и притом с теми же собственными значениями.

Докажем обратное.

Установим прежде всего, что все решения (XXVI.3) при любом λ ортогональны к φ_1. В самом деле, из (XXVI.3) имеем:

$$(\varphi, \varphi_1) = \lambda [(A - B_1)\varphi, \varphi_1] = \lambda (\varphi, (A - B_1)\varphi_1) = 0.$$

Пусть теперь φ_k^* — какое угодно решение (XXVI.3), соответствующее $\lambda = \lambda^*$. В силу того, что φ_k^* ортогонально к φ_1, имеем:

$$B_1\varphi_k^* = 0.$$

Таким образом,

$$(A - B_1)\varphi_k^* = A\varphi_k^*$$

и, следовательно,

$$\varphi_k^* = \lambda^* (A - B_1)\varphi_k^* = \lambda^* A\varphi_k^*,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим для краткости

$$A - B_1 = A_1.$$

Оператор A_1 есть опять симметрический интегральный оператор. Нам могут представиться две возможности: или его ядро — тождественный нуль, или он имеет ещё по крайней мере одну фундаментальную функцию $\varphi_2(P)$, соответствующую собственному значению λ_2 (λ_2 может иногда быть равным λ_1). Но тогда мы сможем составить операцию B_2 с ядром

$$\frac{\varphi_2(P)\,\varphi_2(P_0)}{\lambda_2}$$

и, повторяя прежние рассуждения, притти к оператору

$$A_2 = A - B_1 - B_2,$$

для которого интегральное уравнение

$$\varphi = \lambda A_2 \varphi$$

будет иметь всё те же и только те фундаментальные функции, что и (XXVI.1), кроме φ_1 и φ_2.

Будем продолжать этот процесс.

Если ядро A имеет лишь m собственных функций, то оператор

$$A_m = A - B_1 - B_2 - \ldots - B_m \qquad \text{(XXVI.5)}$$

окажется не имеющим ни одной фундаментальной функции, т. е. тождественно равным нулю.

Отсюда мы имеем теорему.

Теорема 1. Симметрическое нагруженное ядро, имеющее конечное число фундаментальных функций, представляется в виде

$$K(P, P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(P_0)}{\lambda_i} \qquad \text{(XXVI.6)}$$

и, следовательно, является вырожденным.

Если ядро $K(P, P_0)\,\rho(P_0)$ имеет бесконечное множество собственных функций, то мы можем, расположив все λ_i в порядке возрастания абсолютной величины, получить операторы

$$A_m = A - B_1 - B_2 - \cdots - B_m,$$

имеющие все собственные значения лишь достаточно большие по абсолютной величине. (На основании 4-й теоремы Фредгольма числа λ_m должны расти неограниченно.) Пусть

$$\frac{1}{\lambda_m^2} = \varkappa_m.$$

Тогда для всех φ, таких, что $(\varphi, \varphi) = 1$,

$$\max (A_m\varphi, A_m\varphi) = \varkappa_m.$$

В самом деле, если бы $(A_m\varphi, A_m\varphi)$ могло принимать значения, большие, чем $\varkappa_m$, уравнение

$$\varphi = \lambda A_m \varphi$$

имело бы собственное значение

$$|\lambda_{m+1}| < |\lambda_m|,$$

что невозможно.

Мы имеем, таким образом,

$$\lim_{m\to\infty} (A_m\varphi, A_m\varphi) = 0 \tag{XXVI.7}$$

и притом равномерно для всех φ.

В известном смысле равенство (XXVI.7) говорит о том, что $A_m\varphi$ стремится к нулю; следовательно, ядро оператора $K - \sum_{i=1}^{m} L_i$ стремится к нулю. Поэтому ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} L_i$$

в каком-то смысле представляет ядро $K(P, P_0)$.

Если бы оказалось, что ряд $\sum L_i$ равномерно сходится, то ядро $K - \sum_{i=1}^{m} L_i$ оказалось бы ядром, не имеющим собственных значений, т. е. равнялось бы нулю.

Таким образом, получим теорему.

Теорема 2. Если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_0)}{\lambda_i} \tag{XXVI.8}$$

сходится равномерно, то сумма его равна ядру $K(P, P_0)$:

$$K(P, P_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_0)}{\lambda_i}.$$

Однако равномерной сходимости ряда (XXVI.8) может вообще и не быть. При этом представляет интерес ещё один вопрос. *Назовём функцию $f(P_0)$, имеющую вид:*

$$f(P_0) = \int_{\Omega} K(P, P_0)\, h(P)\, \rho(P)\, dP,$$

истокообразно представленной через h с помощью ядра K.

Подставив вместо $K(P, P_0)$ его предполагаемое представление (XXVI.8), мы получили бы для f формулу

$$f(P_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(P_0) \int_{\Omega} \frac{\varphi_i(P) h(P) \rho(P)\, dP}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(P_0), \quad \text{(XXVI.9)}$$

где

$$h_i = \int_{\Omega} h(P) \varphi_i(P) \rho(P)\, dP.$$

Естественно ожидать, что функция f представится в действительности формулой (XXVI.9), которая пока не доказана. Докажем теорему.

Теорема 3. Если $f(P_0)$ — функция, представимая истокообразно через h, причём интеграл

$$\int_{\Omega} h^2(P) \rho(P)\, dP$$

сходится, то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(P_0) \quad \text{(XXVI.10)}$$

сходится в среднем и сумма его равна $f(P_0)$. Иными словами,

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\Omega} \Big[f(P_0) - \sum_{i=1}^{N} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(P_0)\Big]^2 \rho(P_0)\, dP_0 = 0. \quad \text{(XXVI.11)}$$

Эта теорема есть очевидное следствие формулы (XXVI.7). В самом деле,

$$f(P_0) - \sum_{i=1}^{N} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(P_0) = \int_{\Omega} \Big(K - \sum_{i=1}^{N} L_i\Big) h(P) \rho(P)\, dP = A_N h,$$

откуда, применяя формулу (XXVI.7), сразу получим нашу теорему.

В свете доказанных теорем легко понять смысл того нашего рассуждения, с помощью которого мы устанавливаем существование собственных значений. Докажем сначала лемму.

Лемма. (Неравенство Бесселя.) Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots,$ — конечная или бесконечная последовательность вещественных ортогональных и нормированных с весом ρ функций

$$\int_{\Omega} \varphi_i(P) \varphi_j(P) \rho(P)\, dP = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

и пусть f — некоторая функция с интегрируемым квадратом

$$\int_{\Omega} f^2 \rho \, dP = A.$$

Назовём интегралы

$$f_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \rho \, dP$$

коэффициентами Фурье для функции f. Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2$ сходится, и сумма его не превосходит A:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \leqslant A. \qquad \text{(XXVI.12)}$$

Если для некоторой функции неравенство (XXVI.12) превращается в равенство, то говорят, что система функций замкнута по отношению к f.

Неравенство (XXVI.12) носит название неравенства Бесселя.

Для доказательства установим сначала, что

$$\sum_{i=1}^{N} f_i^2 < A,$$

откуда при $N \to \infty$ сразу получим доказательство нашей леммы.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Omega} \left(f - \sum_{i=1}^{N} \varphi_i f_i\right)^2 \rho \, dP = \int_{\Omega} f^2 \rho \, dP - 2 \sum_{i=1}^{N} f_i \int_{\Omega} f \varphi_i \rho \, dP + \\ + \sum_{i=1}^{N} f_i^2 \int \varphi_i^2 \rho \, dP = \int_{\Omega} f^2 \rho \, dP - \sum_{i=1}^{N} f_i^2 = A - \sum_{i=1}^{N} f_i^2 \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что обозначает замкнутость системы φ_i по отношению к f.

Если

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f_i^2 = A,$$

то

$$\lim_{N \to \infty} \left[A - \sum_{i=1}^{N} f_i^2 \right] = 0,$$

и значит,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\Omega}\Big(f-\sum_{i=1}^{N}\varphi_i f_i\Big)^2\rho\,dP=0,$$

т. е. функция $f(P)$ представима рядом $\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_i\varphi_i(P)$, сходящимся в среднем.

Теорема 3 устанавливает, таким образом, замкнутость системы фундаментальных функций по отношению к любой истокообразно представленной функции.

После этого сделаем два небольших замечания.

Замечание 1. Для любой функции ψ с интегрируемым квадратом справедливо равенство:

$$(\psi,\ A\psi)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\psi_i^2}{\lambda_i},$$

где ψ_i обозначают коэффициенты Фурье функции ψ, т. е.

$$\psi_i=\int_{\Omega}\psi(P)\,\varphi_i(P)\,\rho(P)\,dP.$$

Заметим, что $A_m\psi=A\psi-\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\psi_i\varphi_i(P)}{\lambda_i}$, следовательно,

$$(\psi,\ A_m\psi)=(\psi,\ A\psi)-\sum_{i=1}^{m}\Big(\psi,\ \frac{\psi_i\varphi_i(P)}{\lambda_i}\Big)=(\psi,\ A\psi)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i^2}{\lambda_i}.$$

Но

$$|(\psi,\ A_m\psi)|=\Big|\int_{\Omega}\psi\,A_m\psi\,\rho\,dP\Big|\leqslant\sqrt{\int_{\Omega}\psi^2\rho\,dP\int_{\Omega}(A_m\psi)^2\rho\,dP}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int_{\Omega}\psi^2\rho\,dP\,|\varkappa_m|}\xrightarrow[m\to\infty]{}0,$$

так как $\int\limits_{\Omega}\psi^2\rho\,dP$ — величина ограниченная, а $|\varkappa_m|\to 0$.

Мы имеем:

$$\lim_{m\to\infty}\Big|(\psi,\ A\psi)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i^2}{\lambda_i}\Big|=0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если все собственные значения λ_i положительны, то и $(\psi, A\psi) \geqslant 0$ для любых ψ, и обратно, если $(\psi, A\psi)$ никогда не принимает отрицательных значений, то все λ_i положительны.

Ядра с положительными λ_i называются положительными.

Замечание 2. Наименьшее λ_i положительного ядра определяется как

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sup(\psi, A\psi)}, \quad (\psi, \psi) = 1.$$

В самом деле, при $\psi = \varphi_0$ $(\psi, A\psi) = \frac{1}{\lambda_0}$.

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2}{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2}{\lambda_0},$$

где λ_0 — наименьшее положительное из λ_i и, так как $(\psi, \psi) = 1$, то в силу (XXVI. 12)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2}{\lambda_i} \leqslant \frac{1}{\lambda_0},$$

что и требовалось доказать.

Применяя эти рассуждения к ядру K_2, мы придём к тому правилу отыскания собственных значений, которым мы пользовались выше.

Теоремой 3 мы могли бы закончить наше изложение теории интегральных уравнений с симметрическим ядром. Почти все те утверждения, которыми мы пользовались при изложении метода Фурье (см. § 1, XXIV), нами доказаны (правда, пока в несколько более ограниченном виде).

В самом деле, вещественность собственных значений и ортогональность собственных функций нами установлены. Остаётся установить теорему разложения.

Пусть $\varphi(P)$ — произвольная функция в Ω, имеющая непрерывные вторые производные вплоть до контура и удовлетворяющая на границе однородным условиям, например:

$$\varphi(P)|_S = 0. \tag{XXVI.13}$$

Вычислим

$$\Delta\varphi = h. \tag{XXVI.14}$$

В силу (XXVI.13) и (XXVI.14), функция φ может быть представлена с помощью функции Грина в виде:

$$\varphi(P_0) = \int_{\Omega} G(P, P_0)\, h(P)\, \varphi(P)\, dP. \tag{XXVI.15}$$

Формула (XXVI.15) говорит о том, что $\varphi(P_0)$ представима истокообразно. По теореме 3 (XXVI) её можно разложить в ряд

$$\varphi(P_0)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i V_i, \tag{XXVI.16}$$

где V_i — совокупность собственных функций ядра, и ряд будет сходиться в среднем.

Отметим одно следствие доказанной теоремы, важное для приложений.

Для всякой функции φ, имеющей непрерывные вторые производные и удовлетворяющей граничным условиям, будем иметь точное равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2=\int_{\Omega}\varphi^2\,dv, \tag{XXVI.17}$$

где a_i — коэффициенты Фурье для φ.

В самом деле, это следует из того, что замкнутость системы фундаментальных функций эквивалента разложимости в ряд Фурье, сходящейся в среднем. Формула (XXVI.17) носит название формулы Парсеваля.

§ 2. Теорема Гильберта-Шмидта.

Чтобы закончить наше исследование, мы докажем ещё, что при известных условиях сходимость ряда (XXVI.10) или (XXVI.16) будет равномерной.

Теорема 4. (Гильберта-Шмидта.) Если ядро K интегрируемо со своим квадратом по каждому переменному

$$\int_{\Omega}|K(P,P_0)|^2\rho(P)\,dP=A(P_0)\leqslant A, \tag{XXVI.18}$$

то ряд (XXVI.10) сходится равномерно к функции $f(P_0)$.

В самом деле, в силу неравенства Бесселя, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(P_0)}{\lambda_i^2}$ сходится и даже

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(P_0)}{\lambda_i^2}\leqslant A.$$

Это вытекает из того, что $\frac{\varphi_i(P_0)}{\lambda_i}$ служат коэффициентами Фурье для функции $f = K(P, P_0)$:

$$\frac{\varphi_i(P_0)}{\lambda_i} = \int_{\Omega} K(P, P_0)\,\varphi_i(P)\,\rho(P)\,dP.$$

Кроме того, сходится и ряд с постоянными членами

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2 \qquad \text{(XXVI.19)}$$

опять в силу неравенства Бесселя.

Из сходимости (XXVI.19) следует, что

$$\sum_{i=m}^{m+p} h_i^2 < \varepsilon_m,$$

где $\varepsilon_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Оценим сумму

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{h_i \varphi_i(P_0)}{\lambda_i} \right|. \qquad \text{(XXVI.20)}$$

Неравенство Шварца даёт нам

$$\left(\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{h_i \varphi_i}{\lambda_i} \right| \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=m}^{m+p} h_i^2 \right) \left(\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2}{\lambda_i^2} \right) \leqslant \varepsilon_m A;$$

следовательно, сумма (XXVI.20) сколь угодно мала вместе с m и значит, ряд (XXVI.10) сходится равномерно.

Обозначим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i \varphi_i(P_0)}{\lambda_i} = \gamma(P_0).$$

Переходя в формуле (XXVI.11) к пределу, получим:

$$\int_{\Omega} (f-\gamma)^2 \rho\, dP_0 = 0.$$

Следовательно,

$$f(P_0) = \gamma(P_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i \varphi_i(P_0)}{\lambda_i}. \qquad \text{(XXVI.21)}$$

Теорема Гильберта-Шмидта доказана.

Следствие. Билинейный ряд для повторного ядра. Если ядро $K(P, P_0)$ удовлетворяет условию теоремы, то для повторного ядра билинейный ряд сходится и притом равномерно относительно P при фиксированном P_0.

Коэффициентами Фурье для повторного ядра будут служить функции $\frac{\varphi_i(P_0)}{\lambda_i^2}$. Действительно,

$$\int_\Omega K_2(P, P_0)\varphi_i(P)\rho(P)\,dP =$$

$$= \int_\Omega K(P_0, P_1)\left[\int_\Omega K(P_1, P)\varphi_i(P)\rho(P)\,dP\right]\rho(P_1)\,dP_1 =$$

$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_\Omega K(P_0, P_1)\varphi_i(P_1)\rho(P_1)\,dP_1 = \frac{1}{\lambda_i^2}\varphi_i(P_0).$$

Значит,

$$K_2(P, P_0) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_0)}{\lambda_i^2}. \qquad \text{(XXVI.22)}$$

Тем более сходимость имеет место для ядер K_m, где $m \geqslant 2$; для этих ядер, очевидно, имеет место формула:

$$K_m(P, P_0) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_0)}{\lambda_i^m}.$$

Можно показать, хотя мы не будем делать этого, что сходимость билинейного ряда (XXVI.22) равномерная по обеим переменным.

Теорема Гильберта-Шмидта непосредственно применяется для всех ядер типа функции Грина для двух или трёх независимых переменных.

В самом деле, для таких ядер, имеющих особенность $\lg\frac{1}{r}$ или $\frac{1}{r}$, интегрируемость квадрата очевидна. Для того чтобы можно было применить всю теорию Фредгольма, которой мы ранее пользовались, нужно ещё установить, что некоторые повторные ядра для функции Грина будут непрерывными. Их непрерывность устанавливается теми же рассуждениями, которыми раньше мы доказывали ограниченность. Отсюда непосредственно следует равномерная сходимость ряда (XXVI.10) в этом случае, что и требовалось доказать.

Рассмотрим интеграл

$$d_N = \int_\Omega \int_\Omega \left[K(P, P_1) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_1)}{\lambda_i} \right]^2 \rho(P)\rho(P_1)\,dP\,dP_1.$$

Простые преобразования дают

$$d_N = \int_\Omega \int_\Omega [K(P,P_1)]^2 \rho(P)\rho(P_1)\,dP\,dP_1 -$$

$$-2\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \int_\Omega K(P, P_1)\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P_1)}{\lambda_i}\rho(P)\rho(P_1)\,dP\,dP_1 +$$

$$+\int_\Omega \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i^2(P)\varphi_i^2(P_1)}{\lambda_i^2}\rho(P)\rho(P_1)\,dP\,dP_1 =$$

$$= \int_\Omega \left[\int_\Omega [K(P, P_1)]^2 \rho(P_1)\,dP_1 - 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2} \right] \rho(P)\,dP =$$

$$= \int_\Omega \left[K_2(P, P) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2} \right] \rho(P)\,dP.$$

Очевидно, $d_N > 0$. По доказанному выше ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2}$ сходится к функции $K_2(P, P)$.

На основании леммы 8 из лекции VI мы можем утверждать, что неубывающая последовательность функций $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2}$, имея ограниченный интеграл, стремится почти везде к предельной функции, причём возможен предельный переход под знаком интеграла. Эта предельная функция не может быть иной, чем $K_2(P, P)$, откуда следует, что $\lim d_N = 0$.

Полученный результат даёт важную теорему.

Т е о р е м а 5. Билинейный ряд для непрерывного ядра сходится к этому ядру в среднем.

Существует теорема, принадлежащая Мерсеру, которая гласит:

Билинейный ряд для любого непрерывного положительно определённого ядра, т. е. ядра, имеющего лишь положительные собственные значения, сходится всегда равномерно.

Эту теорему, из которой следует равномерная по обеим переменным сходимость (XXVI.22), мы также не будем доказывать.

§ 3. Более общий вид вполне непрерывного оператора.

Кроме рассмотренных выше непрерывных ядер можно указать ещё один класс ядер, более общий, чем непрерывные, для которых, тем не менее, сохраняют силу все высказанные теоремы.

Пусть ядро $K(P, P')$ представляет собою суммируемую с квадратом функцию двух переменных точек P, P' в области Ω^2, т. е. в той области $2n$-переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n; x_1', x_2', \ldots, x_n'$, для которой P и P' каждая лежит в области Ω.

Для таких ядер сохраняет силу вся теория Фредгольма.

В самом деле, покажем прежде всего, что если

$$\int_\Omega\int_\Omega [K(P, P')]^2 dP\,dP' = L^2\Omega^2,$$

где Ω обозначает объём области Ω, то ряд

$$K(P, P') + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda^{k-1} K_k(P, P') = \Gamma(P, P', \lambda)$$

будет сходящимся в среднем в круге $|\lambda| < \frac{1}{L\Omega}$.

Очевидно, что если ядро K ограничено $|K| \leqslant M$, то $L \leqslant M$, причём знак равенства может иметь место только в том случае, если ядро K — постоянное. Таким образом, эта оценка радиуса сходимости существенно улучшает ту, которая была нами получена выше, в лекции XVIII.

Рассмотрим прежде всего повторное ядро $K_{p+q}(P, P')$. Изучим интеграл

$$\int_\Omega\int_\Omega K_{p+q}^2(P, P')\,dP\,dP' = \int_\Omega\int_\Omega \left(\int_\Omega K_p(P, P_1) K_q(P_1, P')\,dP_1\right)^2 dP\,dP'.$$

Пользуясь неравенством Буняковского-Шварца, получим:

$$\int_\Omega\int_\Omega K_{p+q}^2(P, P')\,dP\,dP' \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega\int_\Omega \left(\int_\Omega K_p^2(P, P_1)\,dP_1 \int_\Omega K_q^2(P_1, P')\,dP_1\right) dP\,dP' =$$

$$= \int_\Omega \left\{\int_\Omega {}_p^2(P, P_1)\,dP_1 \int_\Omega \left[\int_\Omega K_q^2(P_1, P')\,dP_1\right] dP'\right\} dP =$$

$$= \int_\Omega\int_\Omega K_p^2(P, P_1)\,dP_1\,dP \int_\Omega\int_\Omega K_q^2(P_1, P')\,dP_1\,dP'.$$

Интеграл в левой части существует, если существуют оба интеграла справа. Применяя эту формулу поочерёдно к K_2, K_3 и т. д. и пользуясь полной индукцией, мы получим, как нетрудно видеть, следующее общее неравенство:

$$\int_\Omega\int_\Omega K_p^2(P, P')\,dP\,dP' \leqslant L^{2p}\Omega^{2p}.$$

Далее будем иметь:

$$K_k(P,P') = \int_\Omega\int_\Omega K(P,P_1)\,K_{k-2}(P_1,P_2)\,K(P_2,P')\,dP_1\,dP_2,$$

$$[K_k(P,P')]^2 \leqslant \int_\Omega\int_\Omega K^2(P,P_1)\,K^2(P_2,P')\,dP_1\,dP_2 \int_\Omega\int_\Omega K^2_{k-2}(P_1,P_2)\,dP_1\,dP_2 \leqslant$$

$$\leqslant L^{2k-4}\Omega^{2k-4}\int_\Omega K^2(P,P_1)\,dP_1 \int_\Omega K^2(P_2,P')\,dP_2,$$

или

$$|K_k(P,P')| \leqslant L^{k-2}\Omega^{k-2}\chi(P)\,\psi(P'),$$

где

$$\chi(P) = \sqrt{\int_\Omega K^2(P,P_1)\,dP_1} \qquad \psi(P') = \sqrt{\int_\Omega K^2(P_2,P')\,dP_2}.$$

Таким образом, мажорантным рядом для резольвенты будет ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^{k-2} L^{k-2}\Omega^{k-2}\chi(P)\,\psi(P'),$$

и ряд для резольвенты будет сходиться при

$$|\lambda| < \frac{1}{L\Omega}$$

во всех тех точках, где χ и ψ имеют конечное значение. Кроме того, сходимость в Ω^2 будет иметь место в среднем. В самом деле, любой отрезок ряда

$$\sum_{k=N}^{N+p} \lambda^{k-1}K_k(P,P')$$

удовлетворяет неравенству

$$\left|\sum_{k=N}^{N+p} \lambda^{k-1}K_k(P,P')\right| \leqslant \chi(P)\,\psi(P') \sum_{k=N}^{N+p} |\lambda^{k-1}|\,L^{k-1}\Omega^{k-1} =$$

$$= \chi(P)\,\psi(P')\,\frac{|\lambda|^{N-1}L^{N-1}\Omega^{N-1} - |\lambda|^{N+p}L^{N+p}\Omega^{N+p}}{1-|\lambda|\,L\Omega} \leqslant$$

$$\leqslant \chi(P)\,\psi(P')\,\frac{|\lambda|^{N-1}L^{N-1}\Omega^{N-1}}{1-|\lambda|\,L\Omega},$$

откуда

$$\int_\Omega \left|\sum_{k=N}^{N+p} \lambda^{k-1}K_k(P,P')\right|^2 dP\,dP' < \frac{[|\lambda|\,L\Omega]^{2N-2}}{[1-|\lambda|\,L\Omega]^2}\int_\Omega \chi^2(P)\,dP \int_\Omega \psi^2(P')\,dP' =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|^4}\,\frac{[|\lambda|\,L\Omega]^{2N+2}}{[1-|\lambda|\,L\Omega]^2}$$

и, следовательно, интеграл этот стремится к нулю с возрастанием N.

По теореме Рисса-Фишера отсюда следует сходимость в среднем ряда для резольвенты. Если $K(P, P')$ ограничено, то сходимость, очевидно, будет равномерной. Уравнения (XVIII.14) и (XVIII.15) для такой резольвенты остаются справедливыми, равно как и все свойства введённой в лекции XVIII операции B^{-1} сохраняются.

Совершенно так же, как ранее, мы можем теперь доказать справедливость всех теорем Фредгольма для ядер, представимых в виде

$$K(P, P_1) = \sum_{l=1}^{N} \chi_l(P)\,\xi_l(P_1) + L^{(N)}(P, P_1), \tag{XXVI.23}$$

где

$$\int_\Omega \chi_l^2(P)\,dP \leqslant B, \qquad \int_\Omega \xi_l^2(P_1)\,dP \leqslant B$$

и

$$\int_\Omega \int_\Omega [L^{(N)}(P, P_1)]^2\,dP\,dP_1 = L^2{}_N \Omega^2 \tag{XXVI.24}$$

во всём круге

$$|\lambda| < \frac{1}{L_N \Omega}$$

(ср. лекцию XVIII).

Отсюда, как и ранее, вытекает, что если можно, меняя N, сделать число L_N в формуле (XXVI.24) сколь угодно малым, то теоремы Фредгольма будут справедливы на всей плоскости λ.

Для дальнейшего нам необходимо сделать несколько замечаний. Докажем одну важную лемму.

Лемма 3. Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ задана в кубе Ω: $-\pi \leqslant x_i \leqslant \pi$ и интегрируема в нём со своим квадратом и если все интегралы

$$\int_\Omega f(x_1, x_2, \ldots, x_m) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_m x_m)}\,dx_1 \ldots dx_m,$$

$$k = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

равны нулю, то эта функция равна нулю всюду, за исключением, быть может, множества точек меры нуль, т. е.

$$\int_\Omega |f(P)|^2\,dP = \int_\Omega f^2(x_1, \ldots, x_m)\,dx_1 \ldots dx_m = 0.$$

Для доказательства мы воспользуемся признаком обращения функции в нуль, изложенным в лекции VI.

Пусть $\varphi(P)$ — функция, неограниченно дифференцируемая и отличная от нуля только в некоторой области Ω_φ, внутренней по отношению к Ω.

Такая функция разложима в равномерно сходящийся тригонометрический ряд [1]):

$$\psi(P) = \sum_{-\infty < k_j < +\infty} a_{k_1 k_2 \ldots k_m} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_m x_m)}$$

и, значит,

$$\psi(P) = \sum_{|k_j| < N} a_{k_1 k_2 \ldots k_m} e^{i(k_1 x_1 + \ldots + k_m x_m)} + R_N,$$

где

$$|R_N| < \varepsilon.$$

Составим интеграл

$$\int_\Omega f(x_1, \ldots, x_m)\psi(P)\,dP =$$

$$= \sum_{|k_j| < N} \int_\Omega f(x_1, \ldots, x_m) a_{k_1 \ldots k_m} e^{i(k_1 x_1 + \ldots + k_m x_m)}\,dx_1 \ldots dx_m +$$

$$+ \int_\Omega f(P) R_N(P)\,dP.$$

Первое слагаемое обращается в нуль, а для второго имеем:

$$\left| \int_\Omega f(P) R_N(P)\,dP \right| \leqslant \varepsilon \int_\Omega |f(P)|\,dP,$$

или, если угодно,

$$\left[\int_\Omega f(P) R_n(P)\,dP \right]^2 \leqslant \int_\Omega [f(P)]^2\,dP \int_\Omega [R_N(P)]^2\,dP;$$

---

[1]) Возможность такого разложения легко устанавливается с помощью применения индукции по числу независимых переменных. Очевидно,

$$\psi(P) = \sum_{-\infty < k_1 < +\infty} a_{k_1}(x_1, \ldots, x_m) e^{ik_1 x_1},$$

где

$$a_{k_1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(P) e^{-ik_1 x_1'}\,dx_1'.$$

Применяя тот же приём к a_{k_1}, установим искомое разложение. Равномерная сходимость его вытекает из того, что, как легко доказать,

$$|a_{k_1 k_2 \ldots k_m}| < \frac{A}{k_1^{s_1} k_2^{s_2} \ldots k_m^{s_m}},$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_m$ — любые положительные числа.

следовательно, второе слагаемое сколь угодно мало при достаточно большом N. Значит

$$\left| \int\limits_{\Omega} f(P)\,\psi(P)\,dP \right| < \varepsilon,$$

откуда

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_m)\,\psi(P)\,dP = 0.$$

Применяя установленный ранее признак, приходим к доказательству леммы.

Теорема 6. Функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ интегрируемая с квадратом в кубе Ω: $-\pi \leqslant x_i \leqslant \pi$, разложима в этом кубе в тригонометрический ряд, сходящийся в среднем

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{-\infty < k_j < +\infty} a_{k_1 \ldots k_m} e^{i(k_1 x_1 + \ldots + k_m x_m)}.$$

Докажем эту теорему.

Вместо разложения в такой ряд достаточно доказать, что $f(x_1, \ldots, x_m)$ разложима в ряд по системе ортогональных функций типа

$$\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} k_1 x_1 \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} k_2 x_2 \ldots \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} k_m x_m.$$

Знак $\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}$ обозначает косинус или синус.

Нормировав эти функции и обозначив их через $\omega_1(P), \ldots, \omega_m(P)$, мы приходим к задаче разложения $f(P)$ в ряд по ортогональным нормальным функциям. Напишем разложение:

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j\,\omega_j(P), \tag{XXVI.25}$$

где

$$f_j = \int\limits_{\Omega} f(P)\,\omega_j(P)\,dP.$$

Согласно неравенству Бесселя

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j^2 \leqslant \int\limits_{\Omega} f^2(P)\,dP.$$

На основании теоремы Рисса-Фишера мы видим, что ряд (XXVI.25) сходится в среднем к некоторой предельной функции $\bar{f}$.

Рассмотрим разность $f(P) - \bar{f}(P) = \chi(P)$.

Эта функция будет ортогональна ко всем ω_i, т. е.

$$\int\limits_{\Omega} \chi(P)\,\omega_i(P)\,dP = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \chi(P)\, e^{i(k_1 x_1 + \ldots + k_m x_m)}\, dx_1 \ldots dx_m = 0.$$

В силу леммы, $\chi(P)$ почти везде равна нулю, что и требовалось доказать.

После этого мы можем уже доказать, что для ядра $K(P, P')$, такого, что

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K^2(P, P')\, dP\, dP' = L^2\,\Omega^2 < \infty,$$

всегда возможно представление (XXVI.23).

С этой целью распространим это ядро на куб Ω_0: $-A \leqslant x_i \leqslant A$, $-A \leqslant x_i' \leqslant A$, определив

$$K(P, P') = 0$$

во всех точках Ω_0, не принадлежащих Ω^2.

В этой области $K(P, P')$ разложимо в ряд

$$K(P, P') = \sum_{\substack{-\infty < k_j < +\infty \\ -\infty < k_j' < +\infty}} a_{k_1 \ldots k_m,\, k_1', \ldots k_m'}\, e^{\frac{i(k_1 x_1 + \ldots + k_m' x_m')}{A}\pi},$$

сходящийся в среднем. Ограничиваясь конечным числом членов, получим искомое представление.

Из всего изложенного вытекает следствие.

Все теоремы Фредгольма сохраняют силу для уравнений, ядра которых удовлетворяют условию:

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K^2(P, P')\, dP\, dP' = L^2\,\Omega^2 < \infty.$$

Для того чтобы закончить теорию интегральных уравнений с такими ядрами, докажем ещё, что оператор

$$A\varphi(P) = \int\limits_{\Omega} K(P, P')\, \varphi(P')\, \rho(P')\, dP'$$

будет вполне непрерывным, если

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K^2(P, P')\, \rho(P)\, \rho(P')\, dP\, dP' < \infty.$$

Ограничимся случаем $\rho(P) = 1$ для простоты изложения.

После предыдущих замечаний ясно, что достаточно доказать следующую теорему:

Теорема 7. Если ядро $K(P, P_1)$ представимо в виде

$$K(P, P_1) = \sum_{l=1}^{N} \chi_l(P)\, \xi_l(P_1) + L^{(N)}(P, P_1),$$

где

$$\int_\Omega \int_\Omega [L^{(N)}(P, P_1)]^2\, dP\, dP_1 < \varepsilon(N),$$

$$\int_\Omega \chi_l^2(P)\, dP \leqslant C; \quad \int_\Omega \xi_l^2(P_1)\, dP_1 \leqslant C,$$

причём $\varepsilon(N)$ сколь угодно мало для достаточно больших N, то оператор

$$A\varphi(P) = \int_\Omega K(P, P_1)\, \varphi(P_1)\, dP_1$$

будет вполне непрерывным в смысле сходимости в среднем.

Докажем эту теорему.

Пусть дана последовательность функций $\varphi_i^{(0)}(P)$, удовлетворяющих условию

$$\int_\Omega [\varphi_i^{(0)}(P)]^2\, dP \leqslant C_1.$$

Покажем, что из $A\varphi_i^{(0)}(P)$ можно выбрать частичную последовательность, сходящуюся в среднем. Этот выбор мы осуществим, постепенно вводя последовательности $\{\varphi_i^{(1)}\}, \{\varphi_i^{(2)}\}, \ldots, \{\varphi_i^{(s)}\}, \{\varphi_i^{(s+1)}\}, \ldots$, содержащиеся одна в другой.

Обозначим $\int_\Omega \varphi_i^{(s)}(P)\, \xi_l(P)\, dP = a_{i,l}^{(s)}$.

Все $a_{i,l}^{(s)}$ ограничены, ибо

$$|a_{i,l}^{(s)}|^2 \leqslant \int_\Omega [\varphi_i^{(s)}(P)]^2\, dP \int_\Omega [\xi_l(P)]^2\, dP \leqslant CC_1.$$

Пусть последовательность $\varphi_i^{(s)}$ каким-то образом выбрана; тогда $\varphi_i^{(s+1)}$ есть такая подпоследовательность $\varphi_i^{(s)}$, которая удовлетворяет двум условиям:

1) $\varphi_i^{(s+1)} = \varphi_i^{(s)}, \quad i = 1, 2, \ldots, s+1.$

2) Существует

$$\lim_{i\to\infty} a_{i,\, s+1}^{(s+1)} = a_{s+1}.$$

Чтобы удовлетворить этому условию, нужно лишь выбрать сходящуюся подпоследовательность из $a_{i,\, s+1}^{(s)}$, что возможно благодаря её ограниченности.

Последовательность $\varphi_i^{(0)}(P)$ была у нас задана, и мы можем построить, исходя из неё, все $\varphi_i^{(s)}$. При этом, очевидно, $\varphi_i^{(s)}$ такова, что будут существовать

$$\lim_{i\to\infty} a_{i,\, l}^{(s+1)} = a_l, \quad l = 1, 2, \ldots, s+1,$$

ибо $a_{i,l}^{(s+1)}$ есть частичная подпоследовательность для $a_{i,l}^{(s)}$.

Составим последовательность

$$\psi_k(P) = \psi_k^{(k)}(P), \quad k = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Эта последовательность будет подпоследовательностью для всех $\psi_i^{(s)}$, и поэтому для неё будет существовать

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,l} = \lim_{k\to\infty} a_{k,l}^{(l)}(P) = a_l.$$

Покажем, что $A\psi_k(P)$ сходится в среднем. В соответствие данному ε выберем N так, чтобы иметь:

$$\int_\Omega \int_\Omega L^{(N)}(P, P_1)^2\, dP\, dP_1 < \frac{\varepsilon^2}{16 C_1}.$$

После этого выберем k столь большим, чтобы

$$|a_{k_1,l} - a_{k_2,l}| < \frac{\varepsilon}{2NC}, \quad l = 1, 2, \ldots, N$$

для любых $k_1 > k$, $k_2 > k$.

На основании неравенства Минковского

$$\left\{\int_\Omega [A\psi_{k_1}(P) - A\psi_{k_2}(P)]^2\, dP\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\int_\Omega \left[\sum_{l=1}^{N} (a_{k_1,l} - a_{k_2,l})\,\chi_l(P) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_\Omega L^{(N)}(P, P_1)[\psi_{k_1}(P_1) - \psi_{k_2}(P_1)]\, dP_1\right]^2 dP\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{N} |a_{k_1,l} - a_{k_2,l}| \left\{\int_\Omega \chi_l(P)^2\, dP\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left\{\int_\Omega \left[\int_\Omega L^{(N)}(P, P_1)[\psi_{k_1}(P_1) - \psi_{k_2}(P_1)]\, dP_1\right]^2 dP\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя далее неравенство Буняковского-Шварца, получим:

$$\left\{\int_\Omega [A\psi_{k_1}(P) - A\psi_{k_2}(P)]^2\, dP\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{l=1} \frac{\varepsilon C}{2NC} +$$

$$+ \left\{\int_\Omega \left[\int_\Omega (L^{(N)}(P, P_1))^2\, dP_1 \int_\Omega [\psi_{k_1}(P_1) - \psi_{k_2}(P_1)]^2\, dP_1\right] dP\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left\{\int_\Omega \int_\Omega [L^{(N)}(P, P_1)]^2\, dP_1\, dP \int_\Omega [\psi_{k_1}(P_1) - \psi_{k_2}(P_1)]^2\, dP_1\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда, на основании теоремы Рисса-Фишера, заключаем о сходимости в среднем $A_{\varphi k}(P)$, что и требовалось доказать.

Для симметрических ядер рассматриваемого типа справедливы все наши рассуждения, за исключением, разумеется, теоремы Гильберта-Шмидта.

Так же можно установить существование собственных значений. Аналогично прежнему строится билинейный ряд. Сходимость в среднем билинейного ряда по обеим переменным P и P_1 также может быть установлена.

Б самом деле, система функций $\varphi_i(P)\,\varphi_j(P')$ представляет собой систему ортогональных нормированных функций переменных P, P' в области Ω^2.

Мы имеем:

$$\frac{1}{\lambda_i}=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K(P,P')\,\varphi_i(P)\,\varphi_i(P')\,dP\,dP'.$$

Таким образом, $\frac{1}{\lambda_i}$ представляют собой коэффициенты Фурье для функции $K(P,P')$ и, значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^2}\leqslant\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K(P,P')^2\,dP\,dP'.$$

Отсюда следует, что билинейный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(P')}{\lambda_i}$$

сходится в среднем к некоторой функции $K^*(P,P')$.

Ядро $K(P,P')-K^*(P,P')$ будет ядром без собственных значений и потому должно равняться нулю почти везде, т. е.

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}[K(P,P')-K^*(P,P')]^2\,dP\,dP'=0,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Применение теории интегральных уравнений с симметрическим ядром.

Одним из важнейших применений теории интегральных уравнений с симметрическим ядром служит теория так называемых уравнений Штурма-Лиувилля, т. е. обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(py')'+ry+\lambda\rho(x)\,y=0, \qquad \text{(XXVI.26)}$$

зависящих от параметра λ с некоторыми граничными условиями.

Будем искать решение такого уравнения, удовлетворяющее однородным условиям:

$$\begin{gathered}[py'+\alpha y]_{x=0}=0,\\ [py'+\beta y]_{x=1}=0.\end{gathered} \qquad \text{(XXVI.27)}$$

Предположив, что при $\lambda = 0$ однородная задача имеет лишь тривиальные решения, и применяя формулу Грина, будем иметь

$$y(x_0) = -\int_0^1 \lambda G(x, x_0)\, y(x)\, \rho(x)\, dx. \qquad \text{(XXVI.28)}$$

Ядро $G(x, x_0)$ будет симметрическим в силу того, что оператор L_y и граничные условия самосопряжённые.

Следовательно, собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, т. е. функции, удовлетворяющие (XXVI.26) и (XXVI.27), будут совпадать с собственными функциями интегрального уравнения (XXVI.28) с нагруженным симметрическим ядром и будут обладать теми же свойствами.

В качестве более общего примера рассмотрим уравнение вида

$$(xy')' - \frac{m^2}{x} y + \lambda xy = 0,$$

или

$$xy'' + y' + x\left(\lambda - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Функция Грина для этого уравнения была построена выше (XXI.52). По отношению к этому уравнению, называемому уравнением *Бесселя*, справедлива вся изложенная теория.

ЛЕКЦИЯ XXVII.

НЕОДНОРОДНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СИММЕТРИЧЕСКИМ ЯДРОМ.

§ 1. Разложение резольвенты.

В предыдущих лекциях нами было подробно изучено однородное интегральное уравнение типа Фредгольма с симметрическим ядром. В настоящей лекции мы изучим неоднородное уравнение с точки зрения разобранной теории и дадим некоторые приложения этих вопросов.

Мы выяснили выше, каким образом можно выразить ядро симметрического интегрального уравнения, зная его собственные значения и собственные функции. Аналогичным образом можно дать представление его резольвенты через те же собственные значения.

В самом деле, применим к неоднородному интегральному уравнению с симметрическим ядром теорему Гильберта-Шмидта. Мы имеем:

$$\mu(P) = f(P) + \lambda \int_{\Omega} K(P, P_1)\, \mu(P_1)\, dP_1$$

(для простоты считаем $\rho = 1$).

Очевидно, что функция $\mu(P) - f(P)$ представима истокообразно через ядро. Следовательно,

$$\mu(P) - f(P) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i \varphi_i(P)}{\lambda_i}, \qquad \text{(XXVII.1)}$$

где

$$\mu_i = \int_{\Omega} \mu(P)\, \varphi_i(P)\, dP.$$

С другой стороны, умножая обе части (XXVII.1) на $\varphi_i(P)$ и интегрируя, получим:

$$\mu_i - f_i = \frac{\lambda \mu_i}{\lambda_i},$$

откуда

$$\mu_i = \frac{f_i}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}} = \frac{\lambda_i f_i}{\lambda_i - \lambda}.$$

Следовательно, функция μ представляется в виде

$$\mu(P) = f(P) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(P). \tag{XXVII.2}$$

Если теперь ввести выражение для f_i через фундаментальные функции и заменить ряд пределом его частичной суммы, то получим:

$$\mu(P) = f(P) + \lambda \lim_{N \to \infty} \int_{\Omega} f(P_1) \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(P_1)}{\lambda_i - \lambda}\, dP_1.$$

Сопоставляя это выражение с формулой, дающей выражение решения через резольвенту, получим предположительное разложение:

$$\Gamma(P, P_1, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(P_1)}{\lambda_i - \lambda}. \tag{XXVII.3}$$

Легко доказать сходимость в среднем написанного ряда для всевозможных λ, не совпадающих ни с одним из λ_i.

Это следует, например, из того, что функции $\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda}$ служат коэффициентами Фурье в разложении $\Gamma(P, P_1, \lambda)$ в ряд по собственным функциям $\varphi_i(P)$.

В самом деле, из интегрального уравнения (XVIII.14) мы видим, что функция $\Gamma(P, P_1, \lambda) - K(P, P_1)$ представима истокообразно через ядро и, значит,

$$\Gamma(P, P_1, \lambda) - K(P, P_1) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i} \gamma_i(P_1),$$

где $\gamma_i(P_1)$ — коэффициенты Фурье для резольвенты.

Отсюда, умножая на $\varphi_i(P)$ и интегрируя, получим:

$$\gamma_i(P_1) - \frac{\varphi_i(P_1)}{\lambda_i} = \lambda \frac{\gamma_i(P_1)}{\lambda_i}.$$

Следовательно, $\gamma_i(P)=\frac{\varphi_i(P_1)}{\lambda_i-\lambda}$, что и требовалось доказать.

Примечание. Как мы видим, резольвента интегрального уравнения с симметрическим ядром является мероморфной функцией во всей комплексной плоскости параметра λ. Все полюсы этой функции — простые и являются собственными значениями ядра.

Подставляя $\gamma_i(P)$ в разложение Гильберта-Шмидта для резольвенты, получим:

$$\Gamma(P, P', \lambda)=K(P, P')+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P')}{\lambda_i(\lambda_i-\lambda)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P')}{\lambda_i}+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(P')}{\lambda_i(\lambda_i-\lambda)}, \quad \text{(XXVII.4)}$$

где ряд во втором слагаемом сходится равномерно.

Условием, необходимым и достаточным для равномерной сходимости ряда (XXVII.4), служит равномерная сходимость билинейного ряда для ядра.

§ 2. Представление решения при помощи аналитических функций.

Разложение в ряд Фурье, которое мы рассматривали в предыдущих лекциях (лекция XXIV, § 2), было у нас интерпретировано чисто геометрическим образом, как представление некоторой функции, рассматриваемой в функциональном пространстве в новых координатах, направленных по главным осям линейного оператора.

Пользуясь резольвентой, мы можем подойти к этому вопросу ещё с одной новой стороны.

Рассмотрим интеграл:

$$\chi(P, \lambda)=-\int_{\Omega}\Gamma(P, P_1, \lambda)f(P_1)\,dP_1=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i\varphi_i(P)}{\lambda_i-\lambda}.$$

Этот интеграл представляет собой мероморфную функцию параметра λ с простыми полюсами в точках λ_i. Вычеты в этих полюсах равны $f_i\varphi_i(P)$ и представляют собой последовательные члены ряда Фурье. Ряд Фурье функции f представляет собой сумму вычетов, а отрезок этого ряда — сумму вычетов, относящихся к некоторой части полюсов.

Поэтому можно представить такой отрезок в виде

$$f_n(P)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\chi(P, \lambda)\,d\lambda,$$

где C — контур в плоскости комплексного переменного λ, захватывающий n первых особых точек резольвенты.

Удобно опять перейти к символической записи.

Положим:

$$\chi(P, \lambda) = -\frac{\mu(P) - f(P)}{\lambda},$$

где $\mu(P)$ — решение уравнения

$$\mu(P) - \lambda \int_\Omega K(P, P_1)\,\mu(P_1)\,dP_1 = f(P),$$

т. е. уравнения

$$(E - \lambda A)\,\mu = f.$$

Как мы уже видели ранее, это решение для малых значений λ можно выписать в виде ряда

$$\mu = (E + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots + \lambda^m A^m + \ldots)\,f,$$

откуда, пользуясь той же символической записью,

$$\chi = -\frac{\mu - f}{\lambda} = -(E - \lambda A)^{-1} A f.$$

При этом

$$f_n = \frac{-1}{2\pi i} \int_C \frac{A}{E - \lambda A}\, f\, d\lambda. \tag{XXVII.5}$$

Мы видели выше аналогию между некоторыми символическими формулами, содержащими многочлены или степенные ряды от оператора A, и соответствующими формулами обычной алгебры и анализа.

Полученная нами интегральная формула (XXVII.5) также является аналогом соответствующей формулы из теории функций. В самом деле, пусть a и f — какие-нибудь числа. Рассмотрим интеграл:

$$\psi = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a}{1 - \lambda a}\, f\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f}{\frac{1}{a} - \lambda}\, d\lambda. \tag{XXVII.6}$$

Очевидно, $\psi = f$, если контур C содержит внутри себя точку $\lambda_0 = \frac{1}{a}$, и $\psi = 0$, если это не так.

Формула (XXVII.5) обобщает формулу (XXVII.6).

Число λ_0 удовлетворяет соотношению

$$\lambda_0\, a\varphi_k = \varphi_k, \tag{XXVII.7}$$

где φ_k — какое-нибудь число, неравное нулю.

Уравнение (XXVII.7) переходит в уравнение (XXVI.1) для определения λ_k, если заменить в нём число a оператором A.

Используем формулу (XXVII.5) для того, чтобы получить новое решение задач математической физики, выраженное в виде определённого интеграла.

Не вдаваясь подробно в теорию этого вопроса, мы разберём пример задачи о распределении тепла, т. е. задачи об интегрировании уравнения

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{XXVII.8}$$

при условии:

$$u|_S = 0,$$
$$u|_{t=0} = u_0(P).$$

Повторим вкратце рассуждения, обычные в методе Фурье.

Применяя к уравнению формулу Грина, будем иметь:

$$u = -\int_{\Omega} G(P, P_1) \frac{\partial u(P_1)}{\partial t} dP_1$$

или символически

$$u + A\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Частные решения этого уравнения будут:

$$u = e^{-\lambda_i t} u_i(P),$$

где

$$u_i - \lambda_i A u_i = 0.$$

Сумма частных решений, соответствующих различным λ_i, т. е. решение в форме ряда Фурье, будет иметь вид:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} u_i(P). \qquad \text{(XXVII.9)}$$

Из условия

$$u|_{t=0} = u_0$$

следует, что $u_i(P)$ суть члены ряда Фурье функции u_0, а это значит, что функции u_i являются вычетами в полюсах резольвенты от функции:

$$-\int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda) u_0(P_1) dP_1.$$

При этом $e^{-\lambda_i t}$ $u_i(P)$ суть вычеты в тех же полюсах функции

$$-e^{-\lambda t} \int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda) u_0(P_1) d P_1,$$

и отрезок ряда (XXVII.9) представляется в виде интеграла

$$u_N = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} e^{-\lambda t} \left(\int_{\Omega} \Gamma(P, P_1, \lambda) u_0(P_1) d P_1\right) d\lambda, \qquad \text{(XXVII.10)}$$

дающего, таким образом, полное решение задачи.

Символически можно записать решение нашей задачи в виде

$$u_N = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} e^{-\lambda t} \frac{A}{E-\lambda A} u_0 d\lambda. \qquad \text{(XXVII.11)}$$

Сравним полученное нами решение с решением обыкновенного уравнения $a\frac{\partial u}{\partial t} + u = 0$, где a — постоянное число.

Очевидно,

$$u = e^{-\frac{1}{a}t} u_0. \qquad \text{(XXVII.12)}$$

На основании теоремы о вычетах

$$u = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{-\lambda t}\frac{a u_0}{1-\lambda a}\,d\lambda.$$

Этот интеграл равен своему вычету в точке $\lambda_0 = \frac{1}{a}$, если λ_0 лежит внутри C, и нулю, если λ_0 — вне этого контура.

На этом основании удобно обозначить символически

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{-\lambda t}\frac{A}{E-\lambda a}\,f_0\,dt$$

через $e^{-\frac{t}{A}} f_0$.

Решение уравнения (XXVII.8) записывается при этом в виде

$$u = e^{-\frac{t}{A}} u_0. \qquad \text{(XXVII.13)}$$

Общая теория функций от операторов, развивать которую мы здесь не имеем возможности, позволяет вывести ряд обобщений этой формулы на значительно более широкий класс задач математической физики.

Развитие этой теории даёт возможность применять аналогичные методы решения задач математической физики в ряде случаев, когда особенности резольвенты не являются изолированными точками в плоскости переменного λ.

Эти идеи, в частности, позволяют изучать решение задач математической физики в неограниченных областях или такие задачи, где рассматриваемые уравнения имеют особенности в изучаемой области. Часто появление таких особенностей связано с изменением аналитического характера резольвенты, приводя, в свою очередь, к особенностям резольвенты, не являющимся просто полюсами.

В следующих главах мы не будем углублять этот вопрос, а займёмся конкретным применением метода Фурье в частных задачах математической физики.

Примеры, которые мы будем рассматривать, весьма поучительны, так как именно с них начиналось развитие вопроса.

ЛЕКЦИЯ XXVIII.

КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА.

В качестве примера применения метода Фурье рассмотрим, прежде всего, колебания прямоугольного параллелепипеда.

Поставим эту задачу следующим образом.

Будем искать решение уравнения

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{XXVIII.1}$$

в области

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c.$$

В качестве граничных условий мы возьмём условия:

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=a} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=b} = u\big|_{z=0} = u\big|_{z=c} = 0, \tag{XXVIII.2}$$

и пусть начальные условия будут:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x, y, z), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x, y, z). \tag{XXVIII.3}$$

По общей теории [см. § 1 (XXIV)] решение будет иметь вид:

$$u = \sum U_i(x, y, z)\,(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t), \tag{XXVIII.4}$$

где U_i — решения уравнения

$$\Delta U_i + \lambda_i^2 U_i = 0, \tag{XXVIII.5}$$

удовлетворяющие условиям (XXVIII.2). В данном случае эти решения можно выразить в конечном виде через элементарные функции.

В самом деле, если решения уравнения (XXVIII.5) искать в виде

$$U_i(x, y, z) = X_i(x)\,V_i(y, z),$$

где X_i зависит только от x, а V_i от x не зависит вовсе, то для определения X_i и V_i получим:

$$V_i X_i + X_i\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}\right) + \lambda_i^2 X_i Y_i = 0,$$

или

$$\frac{X_i''}{X_i} = \frac{\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}}{V_i} + \lambda_i^2 = 0.$$

Очевидно, что

$$\frac{X_i''}{X_i} = -\varkappa_i^2, \quad \frac{\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}}{V_i} = -\tau_i^2,$$

где $\varkappa_i$ и τ_i — постоянные, связанные соотношением

$$\varkappa_i^2 + \tau_i^2 = \lambda_i^2.$$

Уравнение

$$X_i'' + \varkappa_i^2 X_i = 0 \tag{XXVIII.6}$$

имеет при условиях (XXVIII.2) собственными значениями числа

$$\varkappa_i = \frac{k_i \pi}{a},$$

где k_i — целые числа.

При этих, и только при этих, значениях

$$X_i = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{k_i \pi x}{a}$$

удовлетворяет уравнению (XXVIII.6), обоим условиям: при $x=0$ и при $x=a$, и является ортогональной, нормированной системой решений.

Рассматривая уравнение

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z_i^2} + \tau_i^2 V_i = 0,$$

опять ищем его решение в виде

$$V_i = Y_i(y)\, Z_i(z),$$

где Y_i зависит только от y, а Z_i — только от z. Мы будем иметь:

$$\frac{Y_i''}{Y_i} + \frac{Z_i''}{Z_i} + \tau_i^2 = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{Y_i''}{Y_i} = -\sigma_i^2, \quad \frac{Z_i''}{Z_i} = -\mu_i^2,$$

где σ_i и μ_i — постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$\sigma_i^2 + \mu_i^2 = \tau_i^2.$$

Уравнение

$$Y_i'' + \sigma_i^2 Y_i = 0$$

имеет собственные значения

$$\sigma_i = \frac{l_i \pi}{b},$$

где l_i — целые числа, и собственные функции

$$Y_i = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi l_i}{b} y,$$

а уравнение

$$Z_i'' + \mu Z_i = 0$$

имеет собственные значения

$$\mu_i = \frac{m_i \pi}{c},$$

где m_i — целые числа, и собственные функции

$$Z_i = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{\pi m_i}{c} z.$$

Окончательно получим множество собственных функций колебания параллелепипеда вида

$$U_i = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i y}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c}, \qquad \text{(XXVIII.7)}$$

соответствующих собственным значениям уравнения (XXVIII.5) для граничных условий (XXVIII.2):

$$\lambda_i^2 = \pi^2 \left(\frac{k_i^2}{a^2} + \frac{l_i^2}{b^2} + \frac{m_i^2}{c^2} \right), \qquad \text{(XXVIII.8)}$$

где k_i, l_i, m_i пробегают всевозможные тройки целых чисел. Заметим, что числа λ_i могут повторяться, т. е. может оказаться, что

$$\lambda_i = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+k}.$$

Число равных между собой собственных чисел λ_i равно числу решений в целых числах уравнения (XXVIII.8) относительно k_i, l_i, m_i.

Можно доказать, что других собственных значений или собственных функций уравнение (XXVIII.5) при условиях (XXVIII.2) не имеет.

Для этого установим следующую лемму.

Лемма 1. Всякая функция $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющая условиям (XXVIII.2) и имеющая непрерывные вторые производные [1]), представима сходящимся рядом:

$$\varphi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{\pi kx}{a} \times$$
$$\times \left[\sum_{l=1}^{\infty} \sin\frac{\pi ly}{b} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{k,l,m} \sin\frac{\pi mz}{c}\right)\right], \qquad \text{(XXVIII.9)}$$

причём ряды

$$\varphi_{k,l}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{k,l,m} \sin\frac{\pi mz}{c};$$

$$\varphi_k(y, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{k,l}(z) \sin\frac{\pi ly}{b},$$

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_k(y, z) \sin\frac{\pi kx}{a}$$

сходятся равномерно по аргументам, стоящим под знаком синуса, где

$$\varphi_{k,l,m} = \sqrt{\frac{8}{abc}} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \varphi(x, y, z) \sin\frac{\pi kx}{a} \times$$
$$\times \sin\frac{\pi ly}{b} \sin\frac{\pi mz}{c}\, dx\, dy\, dz. \qquad \text{(XXVIII.10)}$$

Будем сначала рассматривать $\varphi(x, y, z)$ как функцию переменного x с параметрами y и z. В силу того что для уравнения (XXVIII.6) и данных краевых условий построена функция Грина [см. § 3 (XXI)], пользуясь теоремой Гильберта-Шмидта, можно функцию $\varphi(x, y, z)$ представить в виде равномерно сходящегося ряда относительно x по собственным функциям уравнения (XXVIII.6), т. е.

$$\varphi(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y, z) \sin\frac{k\pi x}{a},$$

[1]) Вторые производные мы здесь требуем лишь потому, что ссылаемся на теорему о разложении по собственным функциям.

где

$$\varphi_k(y, z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \varphi(x_1, y, z) \sin\frac{k\pi x_1}{a}\, dx_1. \quad \text{(XXVIII.11)}$$

Из формулы (XXVIII.11) видно, что $\varphi_k(y, z)$ есть непрерывная функция y, z, допускающая вторые производные и удовлетворяющая по этим переменным условиям (XXVIII.2). Следовательно, $\varphi_k(y, z)$ представима равномерно сходящимся рядом относительно y:

$$\varphi_k(y, z) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{k,l}(z) \sin\frac{\pi l y}{b},$$

где

$$\varphi_{k,l}(z) = \sqrt{\frac{2}{b}} \int_0^b \varphi_k(y_1, z) \sin\frac{\pi l y_1}{b}\, dy_1.$$

Наконец, $\varphi_{k,l}(z)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по переменному z:

$$\varphi_{k,l}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{k,l,m} \sin\frac{\pi m z}{c},$$

где

$$\varphi_{k,l,m} = \sqrt{\frac{2}{c}} \int_0^c \varphi_{k,l}(z_1) \sin\frac{\pi m z_1}{c}\, dz_1.$$

Сопоставляя формулы для $\varphi_k(y, z)$, $\varphi_{k,l}(z)$ и $\varphi_{k,l,m}$ и ряды для $\varphi(x, y, z)$, $\varphi_k(y, z)$ и $\varphi_{k,l,m}$, сразу получим утверждения леммы.

Пусть теперь U_0 — какая-нибудь собственная функция уравнения (XXVIII.5) при условиях (XXVIII.2). По доказанному в лекции (XXV) её можно считать ортогональной ко всем функциям (XXVIII.7). Согласно лемме её можно разложить в ряд (XXVIII.9). Из формулы (XXVIII.10) следует, что все коэффициенты такого разложения будут равны нулю. Формула (XXVIII.9) даёт при этом

$$U_0 = 0.$$

Следовательно, никаких собственных функций, отличных от (XXVIII.7), наша задача иметь не может.

Точно так же, как мы рассмотрели условие (XXVIII.2), мы могли бы рассмотреть условия другого типа, например,

$$\left(\alpha \frac{du}{dn} + \beta u\right)\Big|_S = 0, \qquad \text{(XXVIII.12)}$$

где α и β принимают постоянные значения на каждой из граней.

Колебания прямоугольной мембраны изучаются тем же способом, как и колебания параллелепипеда.

Полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. Пусть в формуле (XXVIII.12) коэффициенты α и β непостоянные. Тогда разложение собственных функций U_i в произведение $X_iY_iZ_i$, вообще говоря, может и не иметь места. Возникает вопрос: может быть, возможно сделать какую-либо замену независимых переменных, введя вместо x, y, z новые координаты t_1, t_2, t_3 так, чтобы подобное представление оказалось возможным? Координаты, в которых для данной задачи математической физики возможно провести разделение переменных, называются иногда нормальными координатами. Мы можем поставить вопрос: существуют ли нормальные координаты для данной задачи и если существуют, то как их найти?

Для некоторых специальных задач математической физики мы укажем в следующей лекции такие нормальные координаты.

Как недавно доказал В. В. Степанов, нормальные координаты существуют в очень ограниченном классе задач.

ЛЕКЦИЯ XXIX.

УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ.

§ 1. Уравнение Лапласа в криволинейных координатах.

В математической физике часто рассматриваются различные криволинейные координаты: полярные, цилиндрические и т. п. Рассмотрим, как будет выглядеть в таких переменных уравнение Лапласа.

Пусть t_1, t_2, t_3 будут эти криволинейные координаты, связанные с x, y, z формулами

$$t_1 = t_1(x, y, z), \quad t_2 = t_2(x, y, z), \quad t_3 = t_3(x, y, z),$$
$$x = x(t_1, t_2, t_3), \quad y = y(t_1, t_2, t_3), \quad z = z(t_1, t_2, t_3).$$

Рассмотрим две какие-либо кривые

$$x_1(s_1), \; y_1(s_1), \; z_1(s_1)$$

и

$$x_2(s_2), \; y_2(s_2), \; z_2(s_2),$$

проходящие через одну и ту же точку, и рассмотрим угол между ними:

$$\cos\varphi = \frac{dx_1}{ds_1}\frac{dx_2}{ds_2} + \frac{dy_1}{ds_1}\frac{dy_2}{ds_2} + \frac{dz_1}{ds_1}\frac{dz_2}{ds_2}.$$

В новых координатах этот косинус примет вид:

$$\cos\varphi = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial x}{\partial t_i}\frac{\partial x}{\partial t_j} + \frac{\partial y}{\partial t_i}\frac{\partial y}{\partial t_j} + \frac{\partial z}{\partial t_i}\frac{\partial z}{\partial t_j}\right)\frac{dt_i^{(1)}}{ds_1}\frac{dt_j^{(2)}}{ds_2} =$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}\frac{dt_i^{(1)}}{ds_1}\frac{dt_j^{(2)}}{ds_2}.$$

или

$$\cos\varphi\, ds_1\, ds_2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\, dt_i^{(1)}\, dt_j^{(2)}, \qquad \text{(XXIX.1)}$$

где $dt_i^{(1)}$ и $dt_j^{(2)}$ — дифференциалы, взятые соответственно вдоль каждой из рассматриваемых линий.

Заметим, что

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial x}{\partial t_i}\frac{\partial x}{\partial t_j} + \frac{\partial y}{\partial t_i}\frac{\partial y}{\partial t_j} + \frac{\partial z}{\partial t_i}\frac{\partial z}{\partial t_j} = \alpha_{ji}.$$

Если обе линии совпадают, то формула (XXIX.1) примет вид

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\, dt_i\, dt_j. \qquad \text{(XXIX.2)}$$

Для вывода уравнения Лапласа, как и во многих других вопросах, связанных с криволинейными координатами, удобно представить все формулы через коэффициенты α_{ij}.

Если система координат t_1, t_2, t_3 ортогональная, т. е. если координатные линии образуют между собой прямые углы, то все $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$. В самом деле, определим по формуле (XXIX.1) угол между двумя координатными линиями. На одной из координатных линий лишь $dt_i^{(1)} \neq 0$, на другой лишь $dt_j^{(2)} \neq 0$, $i \neq j$, тогда среди произведений $dt_i^{(1)}\, dt_j^{(2)}$ в формуле (XXIX.1) будет лишь один член, не равный нулю. Но по условию $\cos\varphi = 0$, следовательно, $\alpha_{ij} = 0$. Ограничиваясь случаем ортогональности, положим:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} h_i^2, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

При этом

$$ds^2 = h_1^2\, dt_1^2 + h_2^2\, dt_2^2 + h_3^2\, dt_3^2.$$

Примеры.

1. Для полярных координат в пространстве

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

откуда

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2.$$

2. Для цилиндрических координат получим:

$$x = r\cdot\cos\varphi, \quad y = r\cdot\sin\varphi, \quad z = z,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2.$$

Полезно вычислить определитель преобразования $\frac{D(x, y, z)}{D(t_1, t_2, t_3)}$ через те же величины h_1, h_2 и h_3. Для этого мы введём ещё одну промежуточную систему координат x_1, y_1, z_1, которая отличается только поворотом осей от x, y, z. Направления x_1, y_1, z_1 мы выберем таким образом, чтобы в данной точке x, y, z они совпадали соответственно с направлениями t_1, t_2, t_3. При этом в рассматриваемой точке получится

$$\frac{D(x, y, z)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{D(x, y, z)}{D(x_1, y_1, z_1)} \frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \pm \frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(t_1, t_2, t_3)} =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \frac{\partial y_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial z_1}{\partial t_1} & \frac{\partial z_1}{\partial t_2} & \frac{\partial z_1}{\partial t_3} \end{vmatrix},$$

ибо в этой точке $\frac{D(x, y, z)}{D(x_1, y_1, z_1)} = \pm 1$, но в определителе $\frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(t_1, t_2, t_3)}$ все члены, кроме тех, которые стоят на главной диагонали, равны нулю и, значит,

$$\frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \frac{\partial y_1}{\partial t_2} \frac{\partial z_1}{\partial t_3}.$$

Далее, на оси x_1 и на всякой кривой, касательной к x_1 в нашей точке, имеем

$$dx_1^2 = ds^2 = h_1^2 \, dt_1^2,$$

на оси y_1 и на кривой, касательной к ней, аналогично:

$$dy_1 = ds^2 = h_2^2 \, dt_2^2,$$

и, наконец, на оси z_1 и на кривых, касательных к оси z_1:

$$dz_1^2 = ds^2 = h_3^2 \, dt_3^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} &\frac{\partial t_1}{\partial x_1} = \pm \frac{1}{h_1}, \quad &&\frac{\partial t_2}{\partial x_1} = 0, \quad &&\frac{\partial t_3}{\partial x_1} = 0; \\ &\frac{\partial t_1}{\partial y_1} = 0, &&\frac{\partial t_2}{\partial y_1} = \pm \frac{1}{h_2}, &&\frac{\partial t_3}{\partial y_1} = 0; \\ &\frac{\partial t_1}{\partial z_1} = 0, &&\frac{\partial t_2}{\partial z_1} = 0, &&\frac{\partial t_3}{\partial z_1} = \pm \frac{1}{h_3}. \end{aligned} \qquad \text{(XXIX.3)}$$

и

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_1}=\pm h, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t_2}=0, \quad \frac{\partial x_3}{\partial t_3}=0;$$
$$\frac{\partial y_1}{\partial t_1}=0, \quad \frac{\partial y_2}{\partial t_2}=\pm h, \quad \frac{\partial y_3}{\partial t_3}=0;$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial t_1}=0, \quad \frac{\partial z_2}{\partial t_2}=0, \quad \frac{\partial z_3}{\partial t_3}=\pm h;$$

окончательно получим:

$$\frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(t_1, t_2, t_3)}=\pm h_1 h_2 h_3.$$

Знак определяется ориентацией.

Прежде чем вычислить выражение для оператора Лапласа в криволинейных координатах, докажем лемму.

Лемма 1. Если некоторый оператор второго порядка является самосопряжённым, то он обязательно представляется в виде

$$Lu=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+cu, \tag{XXIX.4}$$

причём $A_{ij}=A_{ji}$. Оператор вида (XXIX.4) является самосопряжённым. Это сразу следует из определения самосопряжённости оператора [см. § 2 (V)].

Докажем теперь обратное.

Убедимся сначала, что сопряжённый оператор к данному может быть лишь один. В самом деле, пусть M_1 и M_2 — два оператора, сопряжённых оператору L, и пусть v — функция, везде равная нулю, кроме области Ω_1, внутренней по отношению к Ω; тогда

$$\iiint\limits_{\Omega}(uLv-vM_1u)\,d\Omega=0$$

и

$$\iiint\limits_{\Omega}(uLv-vM_2u)\,d\Omega=0$$

для любой функции u. Вычитая, мы получим:

$$\iiint\limits_{\Omega}v(M_1-M_2)\,u\,d\Omega=0.$$

Но функция v — произвольная в области Ω. Поэтому $(M_1-M_2)u=0$, и, следовательно, операторы M_1 и M_2 тождественны.

Если L имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial u}{\partial t_i}+cu,$$

то сопряжённый с ним будет:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(A_{ji}\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)-\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial u}{\partial t_i}+cu,$$

и они могут быть равны только, если $B_i=0$ и $A_{ij}=A_{ji}$. Наша лемма доказана.

В переменных t_1, t_2, t_3 оператор Лапласа Δ не будет самосопряжённым. Однако его легко выразить через такой оператор. В самом деле, для любой пары функций u и v, выбранных так же, как при доказательстве леммы, имеем:

$$\iiint_{\Omega}(u\,\Delta v-v\,\Delta u)\,dx\,dy\,dz=0,$$

или, переходя к новым переменным:

$$\iiint_{\Omega}(u\,\Delta v-v\,\Delta u)\,h_1h_2h_3\,dt_1\,dt_2\,dt_3=0.$$

Значит, оператор

$$Lu=h_1h_2h_3\,\Delta u$$

будет уже самосопряжённым.

Если

$$Lu=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)$$

(очевидно, что сама функция не может войти ни в Δ ни в L), то

$$\Delta u=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\sum_{j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial t_j}\right). \qquad \text{(XXIX.5)}$$

Коэффициенты β_{ij} при вторых производных в выражении (XXIX.5) будут, как легко видеть, равны $\frac{A_{ij}}{h_1h_2h_3}$.

С другой стороны, β_{ij} можно сосчитать непосредственно. Заменим сначала переменные на x_1, y_1, z_1; при этом Δu не изменится, так как оператор Лапласа инвариантен относительно линейной замены переменных. Теперь, пользуясь формулами (XXIX.3), получим:

$$\beta_{ij} = \frac{\partial t_i}{\partial x_1}\frac{\partial t_j}{\partial x_1} + \frac{\partial t_i}{\partial y_1}\frac{\partial t_j}{\partial y_1} + \frac{\partial t_i}{\partial z_1}\frac{\partial t_j}{\partial z_1} = \begin{cases} \frac{1}{h_i^2}, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2}, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

т. е.

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) + \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right) + \frac{\partial}{\partial t_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)\right]. \quad \text{(XXIX.6)}$$

В полярных координатах, где $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r \sin\theta$, получим:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad \text{(XXIX.7)}$$

В цилиндрических координатах будем иметь:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1;$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad \text{(XXIX.8)}$$

§ 2. Функции Бесселя.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0. \quad \text{(XXIX.9)}$$

Это уравнение носит название уравнения Бесселя. В курсах аналитической теории дифференциальных уравнений и в курсах теории специальных функций устанавливается ряд важных свойств решений этого уравнения, которые мы дадим без доказательства. Желающие могут познакомиться с доказательством этих свойств хотя бы по книге Уиттекера и Ватсона, Курс современного анализа, т. II или Гильберт и Курант, Методы математической физики, т. I.

Мы рассмотрим уравнение (XXIX.9) отдельно для ν целых и дробных.

Справедливы следующие утверждения:

1. Для дробных значений ν уравнение (XXIX.9) имеет два линейно независимых интеграла:

$$J_\nu(x) \quad \text{и} \quad J_{-\nu}(x),$$

разложимых в равномерно сходящиеся на всей плоскости комплексного переменного x ряды:

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(\nu+s+1)},$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2s}}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(-\nu+s+1)}.$$

Иными словами, $x^{-\nu}J_\nu(x)$ и $x^{\nu}J_{-\nu}(x)$ суть целые функции от x. Функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ называются соответственно бесселевыми функциями порядка ν и $-\nu$; их линейная комбинация

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

носит название функции Неймана.

2. Для целых значений $\nu = m$ функции Бесселя порядка m и порядка $-m$ уже не будут независимыми. При этом за линейно независимые решения уравнения (XXIX.7) можно взять две функции:

$$J_m(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2s}}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(m+s+1)} \qquad \text{(XXIX.10)}$$

и

$$N_m(x) = \frac{2}{\pi} J_m(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{m-1} \frac{(m-s-1)!}{\Gamma(s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2s} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \ldots + 1\right) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^s}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(m+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+m} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{m+s} + \frac{1}{m+s-1} + \ldots + 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \ldots + 1\right)\right],$$

где $C = 0{,}577215\ldots$ — эйлерова константа.

Как видно из формул (XXIX.10), функция Бесселя $J_m(x)$ есть целая функция своего аргумента вместе с $x^{-m}J_m(x)$. Функция же $N_m(x)$, называемая функцией Неймана и являющаяся пределом для функции $N_\nu(x)$ при $\nu \to m$, имеет в начале координат особенность в виде точки ветвления, соединённой с полюсом.

3. Для чисто мнимых значений аргумента $x = it$ функция

$$i^{-m}J_m(x) = i^{-m}J_m(it) = I_m(t),$$

являющаяся решением уравнения Бесселя, будет вещественной.

Другое решение уравнения (XXIX.9), вещественное для мнимых значений x, имеет вид:

$$i^{-m}\left[N_m(x) - \frac{i\pi}{2}J_m(x)\right] = i^{-m}\left[N_m(it) - \frac{i\pi}{2}J_m(it)\right].$$

4. Линейные комбинации

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x),$$
$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$$

носят название функций Ганкеля первого или второго рода. Эти функции, являющиеся, очевидно, решениями уравнения Бесселя (хотя и комплексными при вещественных x), имеют следующие асимптотические выражения для больших вещественных значений x, годные как для целых, так и для дробных ν:

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\left[1 + 0\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right], \\ H_\nu^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\left[1 + 0\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXIX.11)}$$

Равенство $f(x) = 0(\varphi(x))$ означает, что отношение $\frac{f(x)}{|\varphi(x)|}$ остаётся ограниченным при $x \to \infty$.

Для $H_\nu^{(1)}(x)$ это представление годится для больших x, удовлетворяющих условию

$$\left|\arg x - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{3\pi}{2},$$

а для $H_\nu^{(2)}(x)$ — для больших значений x, удовлетворяющих условию

$$\left|\arg x + \frac{\pi}{2}\right| < \frac{3\pi}{2}.$$

Из формул (XXIX.11) следуют следующие асимптотические выражения для функций Бесселя и Неймана:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(x^{-\frac{3}{2}}\right),$$
$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(x^{-\frac{3}{2}}\right). \qquad \text{(XXIX.12)}$$

Формулы (XXIX.12) показывают, как ведут себя функции Бесселя и Неймана при возрастании аргумента. Это колеблющиеся функции, бесчисленное множество раз проходящие через нуль. Амплитуда их колебаний постепенно затухает. Корни функций Бесселя и Неймана с одинаковым значком перемежаются.

Для чисто мнимых значений аргумента обозначают

$$i^{-n} J_n(iz) = I_n(z).$$

Функция $I_n(z)$ для вещественных больших значений z имеет представление:

$$I_n(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{1 + 0\left(\frac{1}{z}\right)\right\}.$$

Элементарно можно получить уравнение, которому удовлетворяет функция $I_n(z)$:

$$\frac{d^2 I_n(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dI_n(z)}{dz} - \left(1 + \frac{n^2}{z^2}\right) I_n(z) = 0.$$

Эта функция часто встречается в приложениях.

Обычно в таблицах даются только значения функций $J_0(z)$ и $J_1(z)$. Между функциями $J_n(z)$ для разных n существуют соотношения, позволяющие выразить при целом n любую функцию $J_n(z)$ и её производную через эти две основные функции

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), \quad J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z).$$

§ 3. Полное разделение переменных в уравнении $\Delta u = 0$ в полярных и цилиндрических координатах.

Рассмотрим волновое уравнение на плоскости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Пусть мы изучаем колебания круглой мембраны $r \leqslant 1$ с граничным условием

$$u|_{r=1} = 0 \qquad \text{(XXIX.13)}$$

и начальными условиями

$$u\Big|_{t=0}=u_0;\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_1.$$

Переходя к переменным r и φ: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, преобразуем это уравнение к виду:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad \text{(XXIX.14)}$$

[см. (XXIX.8)].

Решение (XXIX.14) будем искать в виде

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}v_i(r,\varphi)(a_i\cos\lambda_i t+b_i\sin\lambda_i t),$$

где v_i есть решение уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_i}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_i}{\partial\varphi^2}+\lambda_i^2 v_i=0. \qquad \text{(XXIX.15)}$$

Покажем, что r и φ являются нормальными координатами нашей задачи.

Ищем решение v_i опять в виде произведения

$$v_i=\Phi_i(\varphi)R_i(r). \qquad \text{(XXIX.16)}$$

Как мы установим позднее, такие решения существуют. Подставляя (XXIX.16) в уравнение (XXIX.15), получим:

$$\frac{\Phi_i}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_i}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}R_i\frac{d^2\Phi_i}{d\varphi^2}+\lambda_i^2R_i\Phi_i=0$$

или, деля на $R_i\Phi_i$ и умножая на r^2:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR_i}{dr}\right)}{R_i}+\frac{\dfrac{d^2\Phi_i}{d\varphi^2}}{\Phi_i}+\lambda_i^2r^2=0,$$

т. е.

$$-\frac{\dfrac{d^2\Phi_i}{d\varphi^2}}{\Phi_i}=\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR_i}{dr}\right)}{R_i}+r^2\lambda_i^2.$$

Приравнивая обе части постоянной m_i^2, имеем два уравнения:

$$\Phi_i''+m_i^2\Phi_i=0; \qquad \text{(XXIX.17)}$$

$$r(rR_i')'-(m_i^2-r^2\lambda_i^2)R_i=0. \qquad \text{(XXIX.18)}$$

Решение уравнения (XXIX.17) должно обладать периодом 2π для того, чтобы иметь определённый физический смысл. При этом, очевидно, m_i должно быть вещественным и целым. Тогда

$$\Phi_i^{(1)} = \cos m_i\varphi, \quad \Phi_i^{(2)} = \sin m_i\varphi.$$

Уравнение (XXIX.18) преобразуем к самосопряжённому виду:

$$(rR_i')' - \left(\frac{m_i^2}{r} - \lambda_i^2 r\right) R_i = 0. \tag{XXIX.19}$$

В таком виде уравнение для R_i есть самосопряжённое уравнение 2-го порядка. Мы будем искать то его решение, которое обращается в нуль при $r = 1$ и остаётся ограниченным при $r = 0$. По общей теории (см. лекцию XXI, пример, и лекцию XXVI, § 4) такое решение существует для некоторого множества значений λ_i^2.

Лемма 1. Фундаментальные функции уравнения (XXIX.19), удовлетворяющие указанным граничным условиям, ортогональны с весом r [1]):

$$\int_0^1 R_i(r)\, R_j(r)\, r\, dr = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

В самом деле, пусть

$$LR_i \equiv (rR_i')' - \frac{m_i^2}{r} R_i = -\lambda_i^2 r R_i;$$

тогда

$$\int_0^1 [R_j L R_i - R_i L R_j]\, dr = (\lambda_j^2 - \lambda_i^2) \int_0^1 r R_j R_i\, dr.$$

Но интеграл в левой части тождества равен нулю, что и требовалось доказать.

Сделаем подстановку:

$$\lambda_i r = \rho,$$

тогда

$$\frac{d}{dr} = \lambda_i \frac{d}{d\rho},$$

---

[1]) Лемма следует из общей теории, однако, её доказательство приводится вторично. Лемма имеет место для более общего условия при $r = 1$, а именно $(\alpha R_i + \beta R_i')\big|_{r=1} = 0$.

и уравнение (XXIX.19) переписывается так:

$$\lambda_i \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR_i}{d\rho}\right) - \left(\frac{m_i^2 \lambda_i}{\rho} - \lambda_i \rho\right) R_i = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR_i}{d\rho}\right) - \left(\frac{m_i^2}{\rho} - \rho\right) R_i = 0. \qquad \text{(XXIX.20)}$$

Обозначая R_i через y, имеем:

$$y'' + \frac{1}{\rho} y' + \left(1 - \frac{m_i^2}{\rho}\right) y = 0.$$

Мы видим, что задача свелась к уравнению Бесселя, о котором шла речь выше.

Естественно, что мы должны взять за R регулярное решение уравнения (XXIX.20), т. е.

$$R_i(r) = J_{m_i}(\lambda_i r).$$

Значение λ_i мы получим из граничного условия (XXIX.13). Мы имеем:

$$R_i(1) = J_{m_i}(\lambda_i) = 0. \qquad \text{(XXIX.21)}$$

Как следовало ожидать, это уравнение имеет бесконечное множество решений, что с очевидностью следует из асимптотического представления для бесселевой функции (XXIX.12).

Мы получаем, таким образом, систему решений нашей краевой задачи в виде

$$c_i \cos(m_i\varphi) J_{m_i}(\lambda_i r) \quad d_i \sin(m_i\varphi) J_{m_i}(\lambda_i r) \qquad \text{(XXIX.22)}$$

с собственными значениями λ_i^2, где c_i и d_i — некоторые постоянные, определяемые из условия нормировки. Все эти решения ортогональны между собою. Легко доказать, как и в случае колебаний прямоугольного параллелепипеда, что функции (XXIX.22), в которых пары чисел m_i и λ_i суть всевозможные пары, удовлетворяющие уравнению (XXIX.21), дают все собственные функции задачи. Для доказательства установим сначала лемму.

Лемма 2. Произвольная достаточно гладкая функция $\omega(r, \varphi)$, удовлетворяющая граничному условию (XXIX.13), может быть представлена сходящимся рядом вида:

$$\omega(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{mk} \cos m\varphi + \beta_{mk} \sin m\varphi) J_m(\lambda_k^{(m)} r). \qquad \text{(XXIX.23)}$$

где

$$\alpha_{mk}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \omega(r,\varphi)\cos m\varphi J_m(\lambda_k^{(m)}r)\,r\,dr\,d\varphi,$$

$$\beta_{mk}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \omega(r,\varphi)\sin m\varphi J_m(\lambda_k^{(m)}r)\,r\,dr\,d\varphi,$$

причём ряд (XXIX.24) равномерно сходится относительно φ, а ряды (XXIX.25) и (XXIX.27) равномерно сходятся относительно r.

Прежде всего $\omega(r,\varphi)$ как периодическая функция представима в виде

$$\omega(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}[a_m(r)\cos m\varphi+b_m(r)\sin m\varphi], \qquad \text{(XXIX.24)}$$

где

$$a_m(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\omega(r,\varphi)\cos m\varphi\,d\varphi,$$

$$b_m(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\omega(r,\varphi)\sin m\varphi\,d\varphi.$$

Коэффициенты $a_m(r)$ удовлетворяют краевому условию (XXIX.13) и должны оставаться ограниченными при $r=0$, поэтому могут быть разложены в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям самосопряжённого уравнения (XXIX.20), т. е. по функциям $J_m(\lambda_k^{(m)}r)$ (см. пример лекции XXI и лекцию XXVI):

$$a_m(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{mk}J_m(\lambda_k^{(m)}r), \qquad \text{(XXIX.25)}$$

где

$$\alpha_{mk}=\int_0^1 a_m(r)J_m(\lambda_k^{(m)}r)\,dr. \qquad \text{(XXIX.26)}$$

Аналогично

$$b_m(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{mk}J_m(\lambda_k^{(m)}r), \qquad \text{(XXIX.27)}$$

где

$$\beta_{mk} = \int_0^1 b_m(r)\, J_m(\lambda_k^{(m)} r)\, r\, dr. \qquad \text{(XXIX.28)}$$

Сопоставляя (XXIX.25), (XXIX.26), (XXIX.27) и (XXIX.28), получим утверждения леммы.

Из неё сразу следует, что других собственных функций, кроме найденных, наша задача иметь не может, ибо каждая такая собственная функция представлялась бы рядом (XXIX.23) с коэффициентами, равными нулю, и должна, следовательно, равняться нулю.

Задача о колебании мембраны решена тем самым до конца.

ЛЕКЦИЯ XXX.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ И СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

§ 1. Определение сферических функций.

Прежде чем переходить к дальнейшим приложениям метода Фурье, мы займёмся ещё одним важным вопросом. Рассмотрим уравнение Лапласа с тремя переменными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

и поставим себе целью найти те решения этого уравнения, которые имеют вид однородных многочленов степени n относительно x, y и z.

В плоском случае такие однородные решения уравнения Лапласа имеют, как известно, вид

$$(x+iy)^n \quad \text{и} \quad (x-iy)^n.$$

Будем искать частные решения задачи в виде

$$v=(x+iy)^m \sum_{j=0}^{\frac{n-m}{2}} a_j\rho^{2j}z^{n-m-2j}=(x+iy)^m f(\rho^2,\, z) \quad ^{1)}$$

$$(m=0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n), \tag{XXX.1}$$

где

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

---

[1]) Суммирование ведётся от $j=0$ до $j=\mathrm{E}\left(\frac{n-m}{2}\right)$, где $\mathrm{E}\left(\frac{n-m}{2}\right)$ есть целая часть числа $\frac{n-m}{2}$.

Вычисляя оператор Лапласа от v, получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = m(m-1)(x+iy)^{m-2} f(\rho^2, z) + 4m(x+iy)^{m-1} x \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)} + \\ + 2(x+iy)^m \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial \rho^2} + 4x^2 (x+iy)^m \frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -m(m-1)(x+iy)^{m-2} f(\rho^2, z) + 4miy(x+iy)^{m-1} \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)} + \\ + 2(x+iy)^m \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)} + 4y^2 (x+iy)^m \frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = (x+iy)^m \frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial z^2},$$

откуда

$$\Delta v = (x+iy)^m \left[\frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial z^2} + 4(m+1) \frac{\partial f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)} + 4\rho^2 \frac{\partial^2 f(\rho^2, z)}{\partial(\rho^2)^2} \right] = \\ = (x+iy)^m \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{4}{(\rho^2)^m} \frac{\partial}{\partial(\rho^2)} \left[\rho^{2(m+1)} \frac{\partial f}{\partial(\rho^2)} \right] \right\}.$$

Подставляя вместо $f(\rho^2, z)$ его значение, получим:

$$\Delta v = (x+iy)^m \left[\sum_{j=0}^{(n-m):2} (n-m-2j)(n-m-2j-1) a_j \rho^{2j} z^{n-m-2j-2} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{(n-m):2} j(j+m) a_j \rho^{2j-2} z^{n-m-2j} \right].$$

Заменяя во второй сумме j через $j+1$, получим:

$$\Delta v = (x+iy)^m \left\{ \sum_{j=0}^{(n-m):2} \left[(n-m-2j)(n-m-2j-1) a_j + \right. \right. \\ \left. \left. + (j+1)(j+m+1) a_{j+1} \right] \rho^{2j} z^{n-m-2j-2} \right\}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\rho^{2j} z^{n-m-2j-2}$, мы получим систему уравнений, из которой все a_j один за другим выражаются через какой-нибудь один из них. Мы получим:

$$a_1 = (-1) \frac{(n-m)(n-m-1)}{(m+1)} a_0,$$

$$a_2 = (-1)^2 \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{(m+1)(m+2)} a_0,$$

. . . .

$$a_{j+1} = (-1)^{j+1} \frac{(n-m)(n-m-1)\dots(n-m-2j-1)}{(j+1)!\,(m+1)(m+2)\dots(m+j+1)} a_0.$$

Если a_0 вещественно и положительно, то все a_{2j} будут положительны, а все a_{2j+1} отрицательны. Пусть для определённости

$$a_0 = \frac{(n+m)!}{2^m m!\,(n-m)!}.$$

Нами установлено, таким образом, с точностью до постоянного множителя существование одного и только одного гармонического полинома вида

$$v = (x+iy)^m f_{n,m}(\rho^2, z)$$

для каждого n и $m = 0, 1, \ldots, n$.

Присоединяя к ним ещё n полиномов вида

$$(x-iy)^m f_{n,m}(\rho^2, z), \quad m = 1, \ldots, n, \tag{XXX.2}$$

мы получим систему $2n+1$ независимых гармонических полиномов. Покажем, что других однородных гармонических многочленов степени n, независимых от данных, не существует.

Любой однородной многочлен $R_n(x, y, z)$, если ввести в него новые независимые переменные z, $\zeta_1 = x+iy$, $\zeta_2 = x-iy$, будет многочленом относительно z, ζ_1 и ζ_2, а значит, может быть единственным образом представлен в виде:

$$R_n = \varphi_{n,0}(\zeta_1\zeta_2, z) + \sum_{m=1}^{n} [\zeta_1^m \varphi_{n,m}(\zeta_1\zeta_2, z) + \zeta_2^m \varphi_{n,m}(\zeta_1\zeta_2, z)]. \tag{XXX.3}$$

Для этого нужно в полном выражении этого полинома сгруппировать вместе те члены вида $\zeta_1^j\zeta_2^k z^l$, где $j-k = \pm m$.

Отсюда следует, *что любой однородный многочлен степени n единственным образом представляется в виде суммы многочленов* по формуле (XXX.3).

Оператор Лапласа ΔR_n будет сам однородным многочленом степени $(n-2)$, также представляемым единственным образом в виде суммы многочленов по формуле (XXX.3) с заменой n на $(n-2)$. Если R_n — гармонический полином, то все слагаемые в таком разложении ΔR_n должны, следовательно, обратиться в нуль (из единственности следует, что других способов разложить его, кроме того, при котором все члены равны нулю, не существует). С другой стороны, применяя оператор Лапласа к формуле (XXX.3) и замечая, что применение оператора Лапласа к многочлену вида (XXX.1) и (XXX.2) даёт многочлен того же вида, но с соответственным уменьшением n на две единицы, мы видим, что оператор Лапласа от каждого слагаемого суммы (XXX.3) порознь равен нулю и, значит, $\varphi_{n,m} = cf_{n,m}$, что и требовалось доказать.

Продолжая действовать по аналогии с плоским случаем, заменим координаты x, y, z полярными, полагая

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta,$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

При этом любой гармонический полином рассмотренного нами вида будет представляться как

$$r^n e^{\pm im\varphi} f_{n,m}(\sin^2\theta, \cos\theta)\sin^m\theta \qquad \text{(XXX.4)}$$

Пусть

$$f_{n,m}(\sin^2\theta, \cos\theta) = \psi_{n,m}(\cos\theta);$$

нетрудно видеть, что $\psi_{n,m}(\cos\theta)$ есть многочлен от $\cos\theta$, степень которого в точности равна $(n-m)$.

Действительно, каждый член вида

$$a_j z^{n-m-2j}\rho^{2j}$$

заменяется многочленом вида

$$a_j(\cos\theta)^{n-m-2j}\sin^{2j}\theta = a_j(1-\cos^2\theta)^j(\cos\theta)^{n-m-2j},$$

в котором знак при членах, содержащих

$$(\cos\theta)^{n-m-2j},$$

равен $(-1)^k$. В сумме таких многочленов ни одно слагаемое сократиться не может. При этом, очевидно,

$$\psi_{n,m}(1) = a_0 = \frac{(n+m)!}{m!\,2^m(n-m)!}.$$

Полагая

$$\sin^m\theta\,\psi_{n,m}(\cos\theta) = P_n^m(\cos\theta), \qquad \text{(XXX.5)}$$

мы можем, пользуясь выражением (XXX.4), выписать полную систему однородных гармонических полиномов от x, y, z степени n в виде

$$\left.\begin{aligned}
&r^n P_n^{(0)}(\cos\theta),\quad r^n\sin\varphi P_n^{(1)}(\cos\theta),\quad r^n\sin 2\varphi P_n^{(2)}(\cos\theta),\ \ldots\\
&\qquad\ldots,\ r^n\sin n\varphi P_n^{(n)}(\cos\theta);\\
&r^n\cos\varphi P_n^{(1)}(\cos\theta),\quad r^n\cos 2\varphi P_n^{(2)}(\cos\theta),\ \ldots,\\
&\qquad\ldots,\ r^n\cos n\varphi P_n^{(n)}(\cos\theta).
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXX.6)}$$

Функции (XXX.6) служат пространственным аналогом функций

$$\rho^n \cos n\varphi, \quad \rho^n \sin n\varphi,$$

являвшихся решениями плоской задачи о гармонических полиномах, а функции

$$\left.\begin{aligned} &\sin m\varphi P_n^{(m)}(\cos\theta), \\ &\cos m\varphi P_n^{(m)}(\cos\theta), \end{aligned}\right\} \tag{XXX.7}$$

— аналогом тригонометрических функций кратного аргумента, т. е. $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$. Эти функции или их линейные комбинации принято называть сферическими гармониками порядка n.

§ 2. Приближение при помощи сферических функций.

Теорема 1. Линейной комбинацией функций (XXX.7) порядков $0, 1, \ldots, N$ можно с любой точностью представить произвольную непрерывную функцию на сфере радиуса 1.

Для того чтобы доказать эту теорему, установим сначала несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. Произвольная функция $F(\theta, \varphi)$ на поверхности сферы радиуса 1, непрерывная на ней, может быть представлена со сколь угодно большой точностью в виде многочлена:

$$Q\,(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_{klm} x^k y^l z^m.$$

Доказательство. Составим выражение:

$$Q_N = \frac{N+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N F(\theta_1, \varphi_1)\sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1,$$

где $\cos\gamma$ обозначает косинус угла между вектором

$$x = \sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = \sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = \cos\theta$$

и вектором

$$x_1 = \sin\theta_1\cos\varphi_1,$$
$$y_1 = \sin\theta_1\sin\varphi_1,$$
$$z_1 = \cos\theta_1,$$
$$\cos\gamma = xx_1 + yy_1 + zz_1.$$

Легко установить, что Q_N есть полином степени N от x, y, z. Докажем, с другой стороны, что

$$Q_N - F = \varepsilon(N)$$

равномерно стремится к нулю при N, стремящемся к бесконечности.

Рассмотрим интеграл

$$\frac{N+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N F(\theta, \varphi)\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1 =$$

$$= \frac{N+1}{4\pi}F(\theta, \varphi)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N \sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1.$$

Пусть S — поверхность шара радиуса 1. Величина

$$\frac{N+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N \sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1 =$$

$$= \frac{N+1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N dS$$

не зависит от точки (θ, φ). Следовательно, вычисляя её, можно положить $\theta = 0$. При этом $\cos\gamma = \cos\theta_1$, и интеграл запишется так:

$$\frac{N+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\right)^N \sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1 =$$

$$= -\frac{N+1}{4\pi}4\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\right)^N d\left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\right) =$$

$$= -\left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\right)^{N+1}\Bigg|_0^{\pi} = 1.$$

Значит,

$$\frac{N+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N F(\theta, \varphi)\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1 = F(\theta, \varphi).$$

Далее,

$$Q_N - F(\theta, \varphi) =$$

$$= \frac{N+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N [F(\theta_1, \varphi_1) - F(\theta, \varphi)]\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1.$$

Разобьём последний интеграл на два слагаемых, выделив вокруг точки (θ, φ) область на сфере $\gamma < \delta$, так, чтобы иметь

$$|F(\theta, \varphi) - F(\theta_1, \varphi_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для точек (θ_1, φ_1), принадлежащих области $\gamma < \delta$.

Функция $F(\theta, \varphi)$, в силу своей непрерывности, ограничена, значит,

$$|F(\theta, \varphi)| \leqslant M.$$

Возьмём теперь N настолько большим, чтобы удовлетворить неравенству

$$(N+1)\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^N < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

При этом, очевидно,

$$(N+1)\left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N < \frac{\varepsilon}{4M} \quad \text{для} \quad \gamma \geqslant \delta.$$

Для таких N

$$|Q_N - F| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{N+1}{4\pi} \iint\limits_{\gamma \geqslant \delta} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N |F(\theta, \varphi) - F(\theta_1, \varphi_1)| \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 +$$
$$+ \frac{N+1}{4\pi} \iint\limits_{\gamma < \delta} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N |F(\theta, \varphi) - F(\theta_1, \varphi_1)| \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 <$$
$$< \frac{N+1}{4\pi} 2M \iint\limits_{\gamma \geqslant \delta} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N dS + \frac{\varepsilon}{2} \frac{N+1}{4\pi} \iint\limits_{\gamma < \delta} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^N dS <$$
$$< \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Наша лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $Q_k(x, y, z)$ — совершенно произвольный многочлен от переменных x, y, z степени k. Тогда существует гармонический полином $P_k(x, y, z)$ степени не выше k, принимающий на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ те же значения, что и $Q_k(x, y, z)$.

Доказательство. По доказанному выше многочлен $Q_k(x, y, z)$ может быть представлен в виде

$$Q_k = q_0(\rho^2, z) + \sum_{m=1}^{k} [(x+iy)^m q_{1,m}(\rho^2, z) + (x-iy)^m q_{2,m}(\rho^2, z)]$$

[см. (XXX.3)].

Значит, на сфере $x^2+y^2+z^2=1$ будем иметь:

$$Q_k=\tau_0(\cos\theta)+$$
$$+\sum_{m=1}^{k}\sin^m\theta\,[\cos m\varphi\tau_{1,m}(\cos\theta)+\sin m\varphi\tau_{2,m}(\cos\theta)], \qquad \text{(XXX.8)}$$

где $\tau_0(\cos\theta)$ — многочлен степени не выше k от $\cos\theta$, а многочлены $\tau_{1,m}$ и $\tau_{2,m}$ суть многочлены степени не выше $k-m$ от $\cos\theta$.

Но $\tau_0(\cos\theta)$ может, очевидно, быть представлен в виде

$$\tau_0(\cos\theta)=\sum_{j=0}^{k}c_jP_j^0(\cos\theta), \qquad \text{(XXX.9)}$$

а каждое $\sin^m\theta\tau_{1,m}$ и $\sin^m\theta\tau_{2,m}$ может быть представлено в виде

$$\left.\begin{aligned}\sin^m\theta\tau_{1,m}(\cos\theta)&=\sum_{n=m}^{k}c_{n,m}^{(1)}P_n^{(m)}(\cos\theta),\\ \sin^m\theta\tau_{2,m}(\cos\theta)&=\sum_{n=m}^{k}c_{n,m}^{(2)}P_n^{(m)}(\cos\theta).\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXX.10)}$$

Коэффициенты этих разложений могут быть найдены один за другим, начиная со старшего, ибо степень каждого $P_n^{(m)}(\xi)$ возрастает на единицу вместе с номером n.

Подставляя (XXX.9) и (XXX.10) в (XXX.8), мы сразу доказываем нашу лемму. Из лемм 1 и 2 немедленно следует теорема 1. В самом деле, произвольная непрерывная функция с любой точностью может быть на сфере заменена многочленом по лемме 1. По лемме 2 этот многочлен заменяется сразу гармоническим многочленом.

§ 3. Задача Дирихле для шара.

Доказанная теорема даёт нам новый способ решения задачи Дирихле для шара. Мы знаем из предыдущих лекций, что эта задача всегда имеет непрерывное решение и что, если мы заменим предельные значения функции

$$u|_S=\varphi$$

приближёнными φ', так что

$$|\varphi-\varphi'|<\varepsilon,$$

то решение уравнения

$$\Delta u=0$$

при условии

$$u|_S = \varphi'$$

отличается не больше, чем на ε, от решения этого же уравнения при условии $u|_S = \varphi$.

Взяв за φ' линейную комбинацию сферических функций, мы сразу найдём решение задачи в виде суммы соответствующих многочленов. Это и будет приближённым решением задачи Дирихле.

§ 4. Дифференциальные уравнения для сферических функций.

Пусть $Y_n(\theta, \varphi)$ — какая-то сферическая гармоника порядка n. Произведение

$$r^n Y_n(\theta, \varphi)$$

есть гармонический полином. Следовательно,

$$\Delta r^n Y_n(\theta, \varphi) = 0.$$

Пользуясь выражением для оператора Лапласа в полярных координатах [см. (XXIX.7)], получим:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r}(r^n Y_n(\theta, \varphi)\right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}(r^n Y_n(\theta, \varphi))\right] + \\ + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[r^n Y_n(\theta, \varphi)] = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)Y_n = 0. \qquad \text{(XXX.11)}$$

Уравнение (XXX.11) получается из уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0 \qquad \text{(XXX.12)}$$

при

$$\lambda = n(n+1). \qquad \text{(XXX.13)}$$

Обозначим оператор

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

действующий на функцию $\chi(\theta, \varphi)$, определённую на поверхности единичной сферы, через D. Уравнение (XXX.12) запишется при этом в виде:

$$DY + \lambda Y = 0. \qquad \text{(XXX.14)}$$

Оператор D на первый взгляд зависит от того, как выбран полюс сферы. Однако на самом деле он остаётся неизменным при всевозможном выборе координат θ и φ на этой сфере. В самом деле, пусть функция $\chi(\theta, \varphi)$ задана как-нибудь на сфере. Будем считать её заданной во всём пространстве r, θ, φ и не зависящей от r. Тогда

$$D(\chi(\theta, \varphi)) = r^2 \Delta \chi.$$

Оператор Лапласа, стоящий в правой части, не зависит от выбора координатных осей, значит, и оператор D не будет зависеть от этого выбора, что и требовалось доказать.

Длина дуги некоторой линии на сфере ds выражается с помощью соотношения

$$ds = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

или

$$ds^2 = h_1^2\, d\theta^2 + h_1^2\, d\varphi^2, \quad \text{где } h_1 = 1, \ h_2 = \sin\theta.$$

Оператор D выражается через h_1 и h_2 формулой

$$D\chi = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial\varphi} \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial\chi}{\partial\varphi}$$

по аналогии с формулой (XXIX.6), выражающей оператор Лапласа в криволинейных координатах. Выражение $D\chi$ называют поэтому оператором Лапласа на поверхности сферы.

Уравнение (XXX.12) может иметь нетривиальное решение, непрерывное на всей поверхности сферы не при всяком значении λ. Задача об отыскании таких значений λ и самих этих решений аналогична задаче об отыскании решений уравнения

$$y'' + \lambda y = 0,$$

непрерывных на окружности. Эта последняя задача была рассмотрена нами в XXI лекции. Поставленная нами сейчас задача может быть приведена к теории интегральных уравнений при помощи функции Грина. Остановимся подробнее на этом вопросе. Будем искать решение уравнения

$$Dv = \psi(\theta, \varphi) \tag{XXX.15}$$

на сфере. Заметим, что соответствующее однородное уравнение

$$Du = 0 \tag{XXX.16}$$

имеет нетривиальное решение $u \equiv 1$. Поэтому задача об отыскании решения (XXX.15) разрешима не всегда.

Назовём функцией Грина для уравнения (XXX.15) функцию двух переменных точек сферы

$$G = \frac{1}{2\pi} \lg \sin \frac{\gamma}{2},$$

где через γ обозначено угловое расстояние между рассматриваемыми точками. Докажем, что если функция ψ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 0, \tag{XXX.17}$$

то решение уравнения (XXX.15), удовлетворяющее тому же условию

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} v \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 0, \tag{XXX.17'}$$

даётся формулой

$$v(\theta_0, \varphi_0) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} G(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0)\,\psi(\theta, \varphi)\sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \iint\limits_S G\psi \, dS, \tag{XXX.18}$$

где через dS обозначен элемент поверхности сферы. Этим будет оправдано название функции G функцией Грина.

Пусть решение уравнения (XXX.15) существует. Выберем за точку θ_0, φ_0 полюс сферы. Мы будем иметь:

$$\iint\limits_S G\psi \, dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} GDv \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} GDv \, d\varphi\right)\sin\theta \, d\theta =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi} \lg\sin\frac{\theta}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v \, d\varphi\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}d\varphi\right\} d\theta =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v \, d\varphi\right]\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v \, d\varphi\right)\lg\sin\frac{\theta}{2}\right]_{\varepsilon}^{\pi} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\pi}\sin\theta\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v \, d\varphi\right]d\theta -$$

$$- \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v \, d\varphi\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{\pi}.$$

В силу условия (XXX.17), получим:

$$\iint_S G\psi\, dS = v_{\theta=0}. \tag{XXX.19}$$

Из соображений симметрии отсюда следует справедливость формулы (XXX.18) для любой точки сферы. Можно доказать также, что если ψ — произвольная функция, удовлетворяющая условию (XXX.17), то функция $v(\theta_0, \varphi_0)$, определяемая равенством (XXX.18), даёт нам решение уравнения

$$Dv = \psi.$$

Доказательство этого предложения аналогично тому, которое мы проводили неоднократно, и мы его опускаем. Функция Грина, построенная нами, является симметрической функцией, и поэтому к уравнению

$$u = \lambda \iint_S Gu\, dS,$$

эквивалентному (XXX.4), применима вся теория интегральных уравнений с симметрическим ядром.

Если мы поставим себе задачу — найти все регулярные решения уравнения (XXX.12) на сфере, то из указанного вытекает, что значения (XXX.13) будут собственными значениями.

Каждое собственное значение имеет $(2n+1)$ собственных функций. Можно установить теорему.

Теорема 2. Функции (XXX.7) исчерпывают всё множество собственных функций уравнения (XXX.12).

Установим предварительно ещё одну простую лемму.

Лемма 3. Пусть

$$u_1(P),\ u_2(P),\ \ldots,\ u_N(P),$$

— какая-то система ортогональных нормированных функций, а $f(P)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом. Будем исследовать минимум интеграла

$$I_N = \int_\Omega \left[f(P) - \sum_{i=1}^{N} a_i u_i(P) \right]^2 dP.$$

Этот минимум достигается при

$$a_i = \int_\Omega f(P)\, u_i(P)\, dP$$

и равен

$$\int\limits_{\Omega} [f(P)]^2 dP - \sum_{i=1}^{N} a_i^2.$$

В самом деле, пусть

$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} f_i u_i(P) + R_N(P); \qquad \text{(XXX.20)}$$

умножая обе части (XXX.20) на $u_i(P)$ и интегрируя, получим

$$\int\limits_{\Omega} R_N(P) u_i(P)\, dP = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

При этом

$$I_N = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{N} (f_i - a_i) u_i(P) + R_N(P) \right]^2 dP =$$

$$= \int\limits_{\Omega} R_N^2(P)\, dP + \sum_{i=1}^{N} (f_i - a_i)^2.$$

Очевидно, что это выражение будет иметь минимум при $a_i = f_i$. Тогда:

$$\int\limits_{\Omega} R_N^2(P)\, dP = \int\limits_{\Omega} \left[f(P) - \sum_{i=1}^{N} f_i u_i(P) \right]^2 dP =$$

$$= \int\limits_{\Omega} f^2(P)\, dP - \sum_{i=1}^{N} f_i^2,$$

что и требовалось доказать.

Переходим теперь к доказательству нашей теоремы. Пусть $Y^*(\theta, \varphi)$ есть какая-то собственная функция (XXX.12), отличная от (XXX.7), и пусть $u_i(\theta, \varphi)$ есть множество функций (XXX.7), каким-то образом перенумерованное. По теореме 1 функция $Y^*(\theta, \varphi)$ может быть представлена в виде

$$Y^*(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^{N} c_i^N u_i(\theta, \varphi) + \eta_N,$$

где η_N сколь угодно мало.

Значит,

$$\iint\limits_{S} \left[Y^*(\theta, \varphi) - \sum_{i=1}^{N} c_i^{(N)} u_i(\theta, \varphi) \right]^2 ds = \iint\limits_{S} \eta_N^2\, dS < \varepsilon(N).$$

Пусть

$$y_i = \iint_S Y^*(\theta, \varphi)\, u_i(\theta, \varphi)\, dS.$$

Тогда

$$\iint_S \Big(Y^*(\theta, \varphi) - \sum_{i=1}^{N} y_i u_i(\theta, \varphi)\Big)^2 dS \leqslant$$
$$\leqslant \iint_S \Big(Y^*(\theta, \varphi) - \sum_{i=1}^{N} c_i^{(N)} u_i(\theta, \varphi)\Big)^2 dS.$$

Принимая во внимание ортогональность $Y^*(\theta, \varphi)$ со всеми $u_i(\theta, \varphi)$, которая следует из общей теории интегральных уравнений, и вытекающее из этого равенство

$$y_i = 0,$$

получим:

$$\iint_S [Y^*(\theta, \varphi)]^2 dS < \varepsilon.$$

Значит, $Y^*(\theta, \varphi) = 0$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 2 сразу следует возможность представления любой функции $\varphi(S)$ с интегрируемым квадратом по сфере

$$\iint_S \varphi^2(S)\, dS$$

в виде сходящегося в среднем ряда

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i u_i,$$

где

$$\varphi_i = \iint_S \varphi u_i\, dS;$$

сходимость ряда будет равномерной, в силу теоремы Гильберта-Шмидта, если φ имеет непрерывные вторые производные.

Подставим в уравнение (XXV.12) функцию (XXX.7). Пользуясь тем, что

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}[\sin m\varphi\, P_n^{(m)}(\cos\theta)] = -m^2 \sin m\varphi\, P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

мы будем иметь:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial P_n^{(m)}(\cos\theta)}{\partial\theta}\right]+$$
$$+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_n^{(m)}(\cos\theta)=0. \quad (\text{XXX}.21)$$

Уравнение (XXX.21) есть дифференциальное уравнение для функций $P_n^{(m)}(\cos\theta)$. Обозначим:

$$\cos\theta=\mu.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\partial}{\partial\mu},$$

и уравнение (XXX.21) переписывается так:

$$\frac{d}{d\mu}\left[\sin^2\theta\frac{dP_n^{(m)}(\mu)}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_n^{(m)}(\mu)=0,$$

или

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_n^{(m)}(\mu)}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P_n^{(m)}(\mu)=0. \quad (\text{XXX}.22)$$

Полученное дифференциальное уравнение есть линейное уравнение 2-го порядка. Оно получается из уравнения

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dy}{d\mu}\right]+\left[\lambda_1-\frac{\lambda_2}{1-\mu^2}\right]y=0$$

при $\lambda_1=n(n+1)$ и $\lambda_2=m^2$.

Если мы поставим задачу найти такие λ_1 и λ_2, при которых решение этого последнего уравнения ограничено, то можно утверждать, что при $\lambda_2=m^2$ никаких других собственных значений, кроме $\lambda_1=n(n+1)$, оно не будет допускать. Это вытекает из того, что мы имели бы в противном случае собственную функцию y^* уравнения (XXX.22) и соответственно собственную функцию для (XXX.12) в виде $P^*(\cos\theta)\sin m\varphi$, отличную от всех функций (XXX.7), что по доказанному невозможно.

Выясненные нами соотношения позволяют поставить вопрос о решении уравнения Лапласа для шара по методу разделения переменных. Более того, мы фактически уже провели этот метод, исходя из других предпосылок.

Разделяя переменные в уравнении Лапласа:

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

мы будем иметь после простых выкладок, которые мы предоставляем читателю:

$$u = \sum_{\substack{n,\ m \\ m \leq n}} r^n P_n^{(m)}(\cos\theta)\,[a_n^{(m)} \cos m\varphi + b_n^{(m)} \sin m\varphi],$$

где $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ суть решения уравнения

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0,$$

$P_n^{(m)}$ — решение уравнения (XXX.21) или (XXX.22), а r^n — решение уравнения

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - n(n+1)\,R = 0.$$

ЛЕКЦИЯ XXXI.

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

§ 1. Представление полиномов Лежандра.

Разберём некоторые свойства сферических функций.

Теорема 1. Решением уравнения

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dy}{d\mu}\right]+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right)y=0$$

служит функция

$$P_n^{(m)}(\mu)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{n+m}(1-\mu^2)^n}{d\mu^{n+m}}. \qquad \text{(XXXI.1)}$$

Доказательство. Пусть $(1-\mu^2)^n=\Phi$. Непосредственно легко проверить формулу

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\Phi}{d\mu^2}+2(n-1)\mu\frac{d\Phi}{d\mu}+2n\Phi=0.$$

Дифференцируя её $m+n$ раз по μ с помощью известного правила Лейбница, получим:

$$(1-\mu^2)\frac{d^{m+n+2}\Phi}{d\mu^{m+n+2}}-2(m+1)\mu\frac{d^{m+n+1}\Phi}{d\mu^{m+n+1}}+$$
$$+(n-m)(n+m+1)\frac{d^{n+m}\Phi}{d\mu^{n+m}}=0,$$

или, полагая

$$\frac{d^{m+n}\Phi}{d\mu^{m+n}}=\psi,$$

$$(1-\mu^2)\psi''-2(m+1)\mu\psi'+(n-m)(n+m+1)\psi=0.$$

Далее, пусть

$$P_n^{(m)}(\mu)=C(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\psi.$$

откуда прямой подстановкой получаем:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2P_n^{(m)}}{d\mu^2}-2\mu\frac{dP_n^{(m)}}{d\mu}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P_n^{(m)}=$$

$$=C(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}[(1-\mu^2)\varphi''-2(m+1)\mu\varphi'+(n-m)(n+m+1)\varphi]=0,$$

что и требовалось доказать.

Формула (XXXI.1) даёт нам, очевидно, новое явное выражение для $P_n^{(m)}(\cos\theta)$, ибо $r^n\sin m\varphi P_n^{(m)}$ есть гармонический полином, а двух полиномов такого вида быть не может.

Из этой формулы можно получить ряд удобных рекуррентных формул для вычисления функций $P_n^{(m)}(\cos\theta)$.

Многочлены

$$P_n^{(0)}(\mu)=P_n(\mu)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n(1-\mu^2)^n}{d\mu^n}$$

носят особое название полиномов Лежандра. Среди других сферических функций они играют особую роль.

Строго говоря, мы не имеем пока права обозначать через $P_n^{(m)}(\mu)$ функцию (XXXI.1), которая может отличаться от введённой нами ранее $P_n^{(m)}(\mu)$ постоянным множителем. Однако легко установить, что множитель есть единица. Из формулы (XXXI.1) следует, что

$$P_n(1)=1. \qquad \text{(XXXI.2)}$$

В самом деле, положим $\mu-1=z$; тогда

$$(1-\mu^2)^n=(-1)^n z^n(2+z)^n=(-1)^n(2^n z^n+\ldots),$$

откуда сразу и вытекает (XXXI.2).

Если

$$\frac{P_n^{(m)}(\cos\theta)}{\sin^m\theta}=\psi_{n,m},$$

то аналогично

$$\psi_{n,m}(1)=\frac{(n+m)!}{2^m m!(n-m)!},$$

что и доказывает наше утверждение.

§ 2. Производящая функция.

Теорема 2. Разложение функции

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$$

по степеням r имеет вид

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\theta). \tag{XXXI.3}$$

Функция $\frac{1}{r_1}$ *называется поэтому производящей функцией полиномов Лежсндра.*

Эту теорему можно было бы доказать непосредственно, подсчитывая коэффициенты разложения, но можно установить её и другим путём.

Сделаем сначала небольшое замечание. Если гармоническая функция $u(x, y, z)$ разлагается в некотором шаре $r \leqslant \rho$ в равномерно сходящийся ряд по однородным полиномам x, y, z, то такое разложение единственно.

Это замечание вытекает из того, что нуль не может быть разложен в равномерно сходящийся ряд по гармоническим полиномам с коэффициентами, не равными нулю.

Допустив возможность такого разложения и пытаясь определить коэффициенты в полиноме наинизшей степени, мы пришли бы к тому, что все эти коэффициенты равны нулю, и получили бы противоречие.

Рассматривая функцию $\frac{1}{r_1}$ в некоторой сфере $r \leqslant \rho \leqslant 1$, мы можем разложить её в ряд по степеням r, причём коэффициенты, очевидно, будут многочленами от $\cos\theta$, т. е.

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Q_n(\cos\theta).$$

В самом деле,

$$1 - 2r\cos\theta + r^2 = (1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta}), \tag{XXXI.4}$$

откуда сразу следует, что наше разложение будет иметь радиус сходимости, равный единице. Значит, при $r = \rho$

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n Q_n(\cos\theta). \tag{XXXI.5}$$

По доказанному в прошлой лекции гармоническую функцию, принимающую на поверхности $r = \rho$ заданные значения (XXXI.5), можно разложить в равномерно сходящийся ряд:

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta).$$

Из единственности разложения вытекает, что

$$Q_n(\cos\theta) = a_n P_n(\cos\theta).$$

Для того чтобы определить величину a_n, заметим, что при $\cos\theta = 1$ имеем:

$$(1-2r\cos\theta + r^2)_{\theta=0} = (1-r)^2$$

и

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Сравнивая это с выражением $\frac{1}{r_1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n a_n P_n(1)$, имеем:

$$a_n = 1.$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 1.

$$\frac{1}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta), & r<R; \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta), & r>R. \end{cases} \quad \text{(XXXI.6)}$$

В самом деле,

$$\frac{1}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}} = \frac{1}{R}\,\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r}{R}\cos\theta+\left(\frac{r}{R}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{R}{r}\cos\theta+\left(\frac{R}{r}\right)^2}},$$

откуда и следует (XXXI.6).

Следствие 2.

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2\rho r\cos\theta+r^2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{r^n}{\rho^{n+2}}P_n(\cos\theta);\ r<\rho. \quad \text{(XXXI.7)}$$

Заметим ещё, что сходимость рядов (XXXI.6) и (XXXI.7) будет равномерной соответственно, если $R-r>\varepsilon$, $r-R>\varepsilon$ или $\rho-r>\varepsilon$.

Это следует из того, что в силу (XXXI.4) функция $\frac{1}{r_1}$ имеет особенности лишь при $r=e^{\pm i\theta}$.

§ 3. Формула Лапласа.

Пусть теперь $r^n Y_n(\theta, \varphi)$ — некоторый гармонический полином.

Применяя к нему формулу Грина, получаем

$$r^n Y_n(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\rho=1} \left\{ \frac{d\frac{1}{r_1}}{dn} \rho^n Y_n(\theta_1, \varphi_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r_1} \frac{d}{dn} (\rho^n Y_n(\theta_1, \varphi_1)) \right\} dS, \qquad \text{(XXXI.8)}$$

где

$$r_1 = \sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\gamma + \rho^2};$$

$r < \rho$ есть расстояние между точками $M(r, \theta, \varphi)$ и $M(\rho, \theta_1, \varphi_1)$, а γ есть угол между вектором, проведённым в точку M, и вектором, проведённым в точку M_1.

Очевидно,

$$r\rho\cos\gamma = r\sin\theta\cos\varphi\rho\sin\theta_1\cos\varphi_1 + r\sin\theta\sin\varphi\rho\sin\theta_1\sin\varphi_1 +$$
$$+ r\cos\theta\rho\cos\theta_1 = r\rho(\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1)).$$

Подставляя в формулу (XXXI.8) вместо

$$\frac{1}{r_1} \text{ и } \frac{d\frac{1}{r_1}}{dn} = - \frac{d\frac{1}{r_1}}{d\rho}$$

их выражения (XXXI.6) и (XXXI.7), будем иметь:

$$r^n Y_n(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\rho=1} Y_n(\theta_1, \varphi_1) \left[\rho^n (n+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\rho^{n+2}} P_n(\cos\gamma) + \right.$$

$$\left. + n\rho^{n-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\gamma) \right] \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} Y_n(\theta_1, \varphi_1)(2n+1) \left[\sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\gamma) \right] \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1.$$

Очевидно, что $P_j(\cos\gamma)$ при $j \neq n$ ортогонально к $Y_n(\theta, \varphi)$, так как они будут гармониками разных порядков. Интегрируя ряд почленно и замечая, что в нём пропадают все слагаемые, кроме одного, получим:

$$r^n Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^n Y_n(\theta_1, \varphi_1) P_n(\cos\gamma) \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1,$$

т. е.

$$Y_n(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n(\theta_1, \varphi_1) P_n(\cos\gamma) \, d\theta_1 \, d\varphi_1. \quad \text{(XXXI.9)}$$

Формула (XXXI.9) позволяет сразу получать коэффициенты разложения данной функции $F(\theta, \varphi)$ по сферическим гармоникам.

Пусть

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi). \quad \text{(XXXI.10)}$$

Умножая обе части формулы (XXXI.10) на $P_k(\cos\gamma)$ и интегрируя по сфере, получим:

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta_1, \varphi_1) P_k(\cos\gamma) \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1 = Y_k(\theta, \varphi). \quad \text{(XXXI.11)}$$

Формула (XXXI.11) носит название формулы Лапласа.

Заканчивая изложение теории сферических функций, приведём без доказательства ещё несколько формул, которые часто могут быть полезными:

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(\mu)]^2 \, d\mu = \frac{2}{2n+1}, \quad \text{(XXXI.12)}$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^{(m)}(\mu)]^2 \, d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Формулы (XXXI. 12) позволяют непосредственно вычислить коэффициенты разложения функции в ряд по сферическим функциям вида (XXX.7).

Отметим, наконец, асимптотическое представление для полиномов Лежандра при больших значениях n:

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\theta}} \left\{ \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} \right] + \varepsilon_n \right\},$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно θ при $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$.

ЛЕКЦИЯ XXXII.

МЕТОД РИТЦА И ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ В УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

§ 1. Линейные алгебраические уравнения.

Прямыми методами в математической физике называются методы решения задач теории дифференциальных и интегральных уравнений, основанные на замене этих уравнений уравнениями алгебраическими.

С одним из таких методов мы сейчас и познакомимся. Начнём с некоторых вопросов теории линейных алгебраических уравнений с параметром.

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}x_j - \lambda x_i = 0. \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \text{(XXXII.1)}$$

где $\alpha_{ji} = \alpha_i$. Коэффициенты α_{ij} мы предположим вещественными, а λ каким угодно.

Такая система во многих отношениях аналогична уравнению

$$Lu + \lambda u = 0,$$

где Lu — самосопряжённый интегральный оператор.

Установим некоторые свойства системы (XXXII.1).

1. Система (XXXII.1) допускает N независимых между собой решений:

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \ldots,\ x_N^{(1)}, \\ x_2^{(1)},\ x_2^{(2)},\ \ldots,\ x_N^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_N^{(1)},\ x_N^{(2)},\ \ldots,\ x_N^{(N)}, \end{array}$$

соответствующих N значениям λ_i, среди которых возможны одинаковые. Решения эти можно считать ортогональными и нормированными, т. е.

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^{(k)} x_i^{(l)} = 0, \quad k \neq l,$$

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i^{(k)})^2 = 1.$$

Все λ_i вещественны.

2. Коэффициенты α_{ij} могут быть представлены в форме

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_i^{(k)} x_j^{(k)}, \qquad \text{(XXXII.2)}$$

3. Если совершить замену независимых переменных, полагая

$$y_k = \sum_{i=1}^{N} x_i^{(k)} x_i, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \qquad \text{(XXXII.3)}$$

то уравнения (XXXII.1) примут вид

$$\lambda_k y_k - \lambda y_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

4. Будем изучать вместе с системой уравнений (XXXII.1) квадратичную форму

$$A(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} x_i x_j. \qquad \text{(XXXII.4)}$$

Тогда, если сделать в формуле (XXXII.4) замену переменных (XXX.3), то она будет иметь вид

$$A(y) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i^2.$$

Свойства, перечисленные нами, почти все встречались уже неоднократно. В первый раз они разбираются в курсе аналитической геометрии. В несколько видоизменённом виде эти же свойства мы устанавливали при изучении интегральных уравнений с симметрическим ядром. Мы могли бы, пользуясь общей теорией линейных операторов, дать их общую абстрактную формулировку; однако, это не входит в нашу задачу.

Мы проведём ещё раз доказательство этих утверждений с целью лучшего их закрепления.

Введём некоторые обозначения. Условимся совокупности чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_N; \quad y_1, y_2, \ldots; y_N; \ldots$$

вещественных или комплексных, обозначать буквами X, Y, ... и называть векторами и пусть

$$(XY) = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{y}_i.$$

Выражение (XY) мы будем называть скалярным произведением векторов X и Y. Очевидно,

$$(X, Y) = (\overline{Y}, \overline{X}),$$

где черта наверху обозначает комплексное сопряжённое выражение.

Решение системы (XXXII.1) мы будем называть собственным вектором этой системы или собственным вектором квадратичной формы A, а соответствующее число λ—собственным значением.

Вектор Z с составляющими

$$Z_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$$

обозначим $Z = AX$. Очевидно $(AX, Y) = (X, AY)$. Тогда система (XXXII.1) записывается в виде

$$AX - \lambda X = 0.$$

Ортогональность двух решений, соответствующих различным λ, устанавливается с помощью следующих рассуждений. Пусть

$$AX^{(i)} - \lambda X^{(i)} = 0,$$
$$AX^{(j)} - \lambda X^{(j)} = 0;$$

умножая скалярно первое из уравнений на $X^{(j)}$, а второе на $X^{(i)}$, взяв сопряжённое и вычитая, получим:

$$\lambda_i (X^{(i)}, X^{(j)}) - \lambda_j (\overline{X}^{(j)}, \overline{X}^{(i)}) = 0,$$

или

$$(\lambda_i - \lambda_j)(X^{(i)}, X^{(j)}) = 0.$$

Вещественность собственных значений вытекает из того, что два комплексных значения имели бы два комплексных сопряжённых собственных вектора $X^{(i)}$ и $\overline{X}^{(i)}$, и тогда мы имели бы

$$(X^{(i)}, \overline{X}^{(i)}) = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 = 0,$$

что невозможно. Решения, отвечающие одному λ_i, можно ортогонализировать.

Существование собственных значений следует просто из разрешимости систем уравнений с равным нулю определителем. Поэтому, если λ_i есть корень уравнения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}-\lambda, & \ldots, & \alpha_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{N1}, & \alpha_{N2}, & \ldots, & \alpha_{NN}-\lambda \end{vmatrix},$$

то этому корню обязательно соответствует решение $X^{(i)}$. Зная, что собственные векторы можно взять вещественными, мы можем в дальнейшем ограничиться изучением вещественных векторов.

Составляя оператор

$$B_i X = \lambda_i X^{(i)} (X, X^{(i)}),$$

легко докажем, что уравнение

$$(A - B_i) X - \lambda X = 0 \qquad \text{(XXXII.5)}$$

имеет всё те же собственные векторы для тех же λ_j, что и уравнение (XXXII.1), кроме $X^{(i)}$, который будет собственным вектором уравнения (XXXII.5) для $\lambda = 0$.

Значит,

$$\left(A - \sum_{i=1}^{N} B_i \right) X - \lambda X = 0 \qquad \text{(XXXII.6)}$$

имеет все собственные векторы, отвечающие лишь $\lambda_i = 0$, т. е. все корни соответственного уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ для него обращаются в нуль.

Можно доказать, что если все λ_i для уравнения (XXXII.1) равны нулю, то и все коэффициенты его равны нулю.

Докажем, что если хоть одно $\alpha_{ij} \neq 0$, то будет существовать собственный вектор при $\lambda_i \neq 0$.

Пусть
$$\max \frac{(AX, AX)}{(X, X)} = \varkappa_1,$$

который достигается при $X = X_0$, таком, что

$$(X_0, X_0) = 1.$$

Если есть хоть один α_{ij}, неравный нулю, то $\varkappa_1 \neq 0$. Тогда выражение

$$(\varkappa_1 X_0 - A^2 X_0, \varkappa_1 X_0 - A^2 X_0) = \varkappa_1^2 (X_0, X_0) - 2\varkappa_1 (X_0, A^2 X_0) + \\ + (A^2 X_0, A^2 X_0) \leqslant 2\varkappa_1^2 - 2\varkappa_1 (X_0, A^2 X_0) = 0.$$

Значит,

$$\varkappa_1 X_0 - A^2 X_0 = 0;$$

отсюда, как в лекции XXV, следует, что, полагая $\lambda_1 = +\sqrt{\varkappa_1}$, мы получим существование решений по крайней мере у одного из уравнений:

$$\lambda_1 X_0 + AX_0 = 0,$$

или

$$\lambda_1 X_0 - AX_0 = 0,$$

что доказывает существование собственного значения, отличного от нуля.

После вычитания всех операторов B_i уравнению (XXXII.6) будут удовлетворять ровно N независимых векторов (всякий вектор). Значит, и уравнение (XXXII.1) имело N линейно независимых векторов, удовлетворяющих этому уравнению.

Таким образом,

$$A = \sum_{i=1}^{N} B_i,$$

т. е. формула (XXXII.2) справедлива.

Из формул (XXXII.2) и (XXX.3) сразу вытекает справедливость утверждений 3 и 4.

Утверждение 4 очевидно сразу, а 3 получается, если умножить скалярно обе части уравнения (XXXII.1) на X^s. Мы получим:

$$\lambda (X^s, X) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (X^i, X^s)(X^i, X) = 0,$$

или в силу ортогональности X^s и X^i:

$$\lambda y_s - \lambda_s y_s = 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Экстремальные свойства квадратичных форм.

Собственные значения системы уравнений (XXXII.1) можно рассматривать как некоторые числа, связанные с квадратичной формой $A(x)$. Рассмотрим относящиеся сюда теоремы.

Теорема 1. Минимум квадратичной формы $A(x)$ при условии

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 1 \qquad \text{(XXXII.7)}$$

достигается и равен λ_1, где λ_1 — наименьшее из её собственных значений.

В самом деле, форма $A(x)$ в переменных y будет иметь вид

$$A(y)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i y_i^2, \tag{XXXII.8}$$

условие же (XXXII.7) переписывается так:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i^2=1. \tag{XXXII.9}$$

Очевидно, при $y_1=1,\ y_2=y_3=\ldots=y_N=0$

$$A(y)=\lambda_1.$$

Пусть теперь y_i — какие угодно. Умножая (XXXII.9) на λ_1 и вычитая из (XXXII.8), будем иметь:

$$A(y)-\lambda_1=\sum_{i=1}^{N} y_i^2(\lambda_i-\lambda_1),$$

откуда видно, что $A(y)-\lambda_1$ неотрицательно. Теорема доказана.

Будем теперь, кроме условия (XXXII.7), накладывать ещё $m-1$ условие:

$$\sum_{i=1}^{N}\gamma_i^{(j)}x_i=0,\quad j=1,2,\ldots,(m-1). \tag{XXXII.10}$$

Обозначим:

$$\min A(x)=\psi\left(\gamma_1^{(1)},\ldots,\gamma_N^{(1)},\ldots,\gamma_1^{(m-1)},\ldots,\gamma_N^{(m-1)}\right),$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2=1, \tag{XXXII.7}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\gamma_i^{(j)}x_i=0;\quad j=1,2,\ldots,(m-1). \tag{XXXII.10}$$

Теорема 2. Максимум функции ψ при всевозможных значениях $\gamma_i^{(j)}$ достигается и равен λ_m, где λ_m — характеристическое число номера m, если считать их всех расположенными в неубывающем порядке, т. е.

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\ldots\leqslant\lambda_N.$$

Эту теорему называют теоремой Куранта.

В самом деле, при $\gamma_i^{(j)} = \alpha_i^{(j)}$ мы получили бы, переходя к координатам y_i, вместо соотношений (XXXII.10) уравнения

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{m-1} = 0.$$

По первой теореме при этом

$$\min A(y) = \lambda_m.$$

С другой стороны, при всевозможных $\gamma_i^{(j)}$ величина ψ никогда не может превзойти λ_m.

Каковы бы ни были числа

$$\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \ldots, \gamma_N^{(j)}; \quad j = 1, 2, \ldots, (m-1),$$

мы можем подставить в форму $A(y)$ вектор, в котором $y_{m+1} = y_{m+2} = \ldots y_N = 0$.

Это вытекает из того, что всегда могут быть выбраны m чисел $y_1, y_2, \ldots, y_m$ так, чтобы они удовлетворяли системе уравнений:

$$\alpha_1^{(j)} y_1 + \alpha_2^{(j)} y_2 + \ldots + \alpha_{m-1}^{(j)} y_{m-1} = 0;$$
$$j = 1, 2, \ldots, (m-1),$$

каковы бы ни были коэффициенты $\alpha_i^{(j)}$.

Следовательно, $A(y)$ будет равно при этом

$$A(y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i^2, \qquad \text{(XXXII.11)}$$

причём

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^2 = 1; \qquad \text{(XXXII.12)}$$

умножая (XXXII.12) на λ_m и вычитая из (XXXII.11), будем иметь:

$$A(y) - \lambda_m = \sum_{i=1}^{m-1} (\lambda_i - \lambda_m) y_i^2 \leqslant 0.$$

Следовательно, при любых $\alpha_i^{(j)}$, т. е. при любых $\gamma_i^{(j)}$,

$$A(y) - \lambda_m \leqslant 0$$

и, значит,

$$\psi \leqslant \lambda_m,$$

что и требовалось доказать.

Доказанные нами теоремы сводятся к следующему.

Теорема 3. Корни уравнения $\Delta(\lambda)=0$ являются собственными значениями параметра λ для системы (XXXII.1). Они же могут быть определены как максимум минимумов квадратичной формы $A(x)$ при условии (XXXII.7) и линейных условиях (XXXII.10).

Для краткости будем называть числа λ_i сложными экстремумами $A(x)$ при условии $\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2=1$.

Замечание. Мы рассматривали собственные значения системы (XXXII.1) как сложные экстремумы квадратичной формы $A(x)$ при условии $\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2=1$.

Если бы величины x_i были связаны линейно с некоторыми величинами z_i:

$$x_i=\sum_{s=1}^{N} \alpha_{is}z_s, \quad i=1, 2, \ldots, N,$$

то наша задача привелась бы к более общей задаче об отыскании сложных экстремумов формы $B(z)=A(x)$ при условии

$$C(z)=\sum_{i=1}^{N} x_i^2=1.$$

Пусть

$$B(z)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \beta_{ij}z_iz_j; \qquad C(z)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij}z_iz_j.$$

Как мы видели в лекции III, § 1, для всякой положительной формы $C(z)$ всегда возможно при заданных β_{ij} найти такие переменные x_i, при которых форма $C(z)$ превратится в сумму квадратов. Более общая постановка оказывается, таким образом, эквивалентна прежней, ибо одна задача сводится к другой. Однако, если формы $B(z)$ и $C(z)$ заданы, нет надобности для нахождения λ_i переходить к переменным x_i.

Система уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} \beta_{ij}z_j+\lambda\sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij}z_j=0 \qquad \text{(XXXII.13)}$$

будет при этом эквивалентна системе (XXXII.1), и её определитель совпадает с определителем $\Delta(\lambda)$. В самом деле, уравнение (XXXII.13) представляется в виде

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\,[B(z)+\lambda C(z)]=0.$$

Очевидно, что эта система эквивалентна системе

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[A(x)+\lambda\sum_{i=1}^{N}x_i^2\Big]=0,$$

что и требовалось доказать.

Удобно иногда, пользуясь установленными фактами, называть корни определителя системы (XXXII.13) собственными значениями формы $B(z)$ при условии $C(z)=1$.

§ 3. Экстремальные свойства собственных значений для уравнения $\Delta u+\lambda u=0$.

Переходим к исследованию экстремальных свойств собственных значений дифференциальных уравнений. Не развивая здесь общей теории, рассмотрим пример, на котором постараемся выяснить все важнейшие обстоятельства.

Пусть дано уравнение

$$\Delta u+\lambda u=0 \qquad \text{(XXXII.14)}$$

на плоскости x, y при условии

$$u|_S=0. \qquad \text{(XXXII.15)}$$

Теорема 4. Наименьшее собственное значение λ_1 уравнения (XXXII.14) при условии (XXXII.15) равно минимуму интеграла

$$Y(u)=\iint\limits_{\Omega}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big]dx\,dy$$

при условии

$$\iint\limits_{\Omega}u^2\,dx\,dy=1.$$

$Y(u)$ рассматривается для функций, удовлетворяющих (XXXII.15) и имеющих производные с интегрируемым квадратом. Область Ω в плоскости (x, y) ограничена достаточно гладким контуром.

Замечание. В лекции XXVI мы установили формулу

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2=\iint\limits_{\Omega}v^2\,dx\,dy$$

(формулу Парсеваля) для функций, имеющих непрерывные вторые производные и удовлетворяющих граничным условиям.

Эта формула остаётся справедливой, если вместо v подставить любую функцию, имеющую ограниченные первые производные.

В самом деле, нетрудно видеть, что любая такая функция v может быть представлена в виде

$$v = v' + v'',$$

где v' удовлетворяет граничным условиям и имеет непрерывные вторые производные, а для v'' имеет место неравенство

$$\iint_\Omega v''^2\,dx\,dy < \varepsilon,$$

где ε — любое наперёд заданное положительное число.

При этом:

$$v_i = v'_i + v''_i.$$

Пользуясь формулой Парсеваля и неравенством Бесселя, получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_i'^2 = \iint_\Omega v'^2\,dx\,dy, \quad \sum_{i=1}^{\infty} v_i''^2 < \varepsilon.$$

Далее,

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} v_i'^2 + \sum_{i=1}^{\infty} v_i''^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} v'_i v''_i,$$

$$\iint_\Omega v^2\,dx\,dy = \iint_\Omega v'^2 dx\,dy + \iint_\Omega v''^2\,dx\,dy + 2\iint_\Omega v'v''\,dx\,dy.$$

Неравенство Шварца даёт

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} v'_i v''_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} v_i'^2 \sum_{i=0}^{\infty} v_i''^2 \leqslant \varepsilon \iint_\Omega v'^2\,dx\,dy,$$

$$\left(\iint_\Omega v'v''\,dx\,dy\right)^2 \leqslant \iint_\Omega v'^2\,dx\,dy \iint_\Omega v''^2\,dx\,dy \leqslant \varepsilon \iint_\Omega v'^2\,dx\,dy.$$

Пользуясь тем, что

$$\iint_\Omega v'^2\,dx\,dy = \iint_\Omega (v^2 + v''^2 - 2vv'')\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \iint_\Omega v^2\,dx\,dy + \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}\left(\iint_\Omega v^2\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}} < 2\iint_\Omega v^2\,dx\,dy,$$

будем иметь:

$$\left|\iint_\Omega v^2\,dx\,dy-\sum_{i=1}^{\infty}v_i^2\right|=$$

$$=\left|\iint_\Omega v''^2\,dx\,dy+2\iint_\Omega v'v''\,dx\,dy-\sum_{i=1}^{\infty}v_i''^2-2\sum_{i=1}^{\infty}v_i'v_i''\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon+4\sqrt{\varepsilon}\left(\iint_\Omega v'^2\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 2\varepsilon+8\sqrt{\varepsilon}\iint_\Omega v^2\,dx\,dy\leqslant\sqrt{\varepsilon}\,K,$$

где K — постоянная, что и требовалось доказать.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, докажем две леммы.

Лемма 1. Собственные значения уравнения (XXXII.14) при условии (XXXII.15) все положительны:

$$\lambda_i>0.$$

(Для других типов граничных условий неравенство $\lambda_i>0$ переходит в неравенство $\lambda_i>A$, где A может быть отрицательным.)

Пусть U_i — какая-нибудь собственная функция. Тогда по формуле Грина:

$$\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\iint_\Omega U_i\,\Delta U_i\,dx\,dy=$$

$$=\lambda_i\iint_\Omega U_i^2\,dx\,dy=\lambda_i,$$

откуда и вытекает наше утверждение.

Заметим, что все числа λ_i можно расположить в виде неубывающей последовательности:

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\ldots\leqslant\lambda_N\leqslant\ldots$$

Лемма 2. Если

$$\iint_\Omega U\,F\,dx\,dy=0,$$

где F удовлетворяет граничному условию (XXXII.15), то

$$\iint_\Omega\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial U_1}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

В самом деле, формула Грина даёт:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial U_i}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx\,dy=-\iint_\Omega F\Delta U_i\,dx\,dy=$$

$$=\lambda_i\iint_\Omega U_iF\,dx\,dy=0.$$

Переходим к доказательству теоремы. Пусть u — произвольная функция с ограниченными производными 1-го порядка. Тогда в силу ортогональности и нормальности собственных функций:

$$u=\sum_{i=1}^N u_iU_i+R_N,$$

где

$$u_i=\iint_\Omega uU_i\,dx\,dy$$

и

$$\iint_\Omega R_NU_i\,dx\,dy=0 \text{ при } i<N.$$

Преобразуя интеграл $Y(u)$ и пользуясь доказанными леммами, мы получим:

$$\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial\sum\limits_{i=1}^N U_iu_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sum\limits_{i=1}^N U_iu_i}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial R_N}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial R_N}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial R_N}{\partial x}\frac{\partial\sum\limits_{i=1}^N U_iu_i}{\partial x}+\frac{\partial R_N}{\partial y}\frac{\partial\sum\limits_{i=1}^N U_iu_i}{\partial y}\right)\right]dxdy=$$

$$=\sum_{i=1}^N\lambda_iu_i^2+\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial R_N}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial R_N}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Следовательно, каково бы ни было N,

$$\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\geqslant\sum_{i=1}^N\lambda_iu_i^2;$$

поэтому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i^2$ сходится, и мы имеем

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_i^2 + \lambda_{N+1} \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i^2. \quad \text{(XXXII.16)}$$

Из неравенства (XXXII.16) наша теорема следует немедленно. В самом деле, при $u=U_1$ имеем $Y(U_1)=\lambda_1$.

Кроме того, из условия

$$\iint_{\Omega} u^2\, dx\, dy = 1$$

имеем по формуле Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 = 1. \quad \text{(XXXII.17)}$$

Умножая (XXXII.17) на λ_1 и вычитая из (XXXII.16), получим:

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy - \lambda_1 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_1) u_i^2 \geqslant 0,$$

что и доказывает теорему.

Будем рассматривать минимум функционала $Y(u)$ при условии

$$\iint_{\Omega} u^2\, dx\, dy = 1$$

и

$$\iint_{\Omega} \gamma_i(x, y)\, u(x, y)\, dx\, dy = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m-1, \quad \text{(XXXII.18)}$$

где для сравнения допускаются любые функции, обладающие производными с интегрируемым квадратом.

Минимум этого функционала $Y(u)$ при указанных условиях обозначим через

$$\psi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-1}).$$

Теорема 5. Функционал ψ достигает своего максимума, и максимум этот равен λ_m.

Доказательство. Очевидно, что при $\gamma_i = U_i$; $i = 1, \ldots, m-1$ функция U_m будет реализовать минимум $Y(u)$.

В самом деле,

$$Y(U_m) = \lambda_m.$$

При этом всякая допустимая для сравнения с U_m функция представима в виде

$$u = u_m U_m + R_m,$$

и мы получим

$$Y(u) \geqslant \lambda_m u_m^2 + \lambda_{m+1} \sum_{i=m+1}^{\infty} u_i^2 \geqslant \lambda_m \sum_{i=m}^{\infty} u_i^2 = \lambda_m.$$

Значит, одно из значений ψ равно λ_m. Покажем, что ψ никогда не превосходит λ_m. В самом деле, будем искать минимум $Y(u)$ среди функций

$$u = \sum_{i=1}^{m} u_i U_i; \quad \sum_{i=1}^{m} u_i^2 = 1.$$

Подбирая числа u_i, такими функциями можно удовлетворить условиям (XXXII.18) при любых $\gamma_i(x, y)$. При всяком другом выборе u можно положить

$$u = \sum_{i=1}^{m} u_i U_i + R_m,$$

где $\iint\limits_{\Omega} R_m U_i \, dx \, dy = 0$, и легко видеть, что при этом минимум не достигается. Таким образом,

$$Y(u) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i^2$$

и, значит,

$$Y(u) - \lambda_m = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda_m) u_i^2 \leqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Метод Ритца. Вычисление собственных значений.

Мы можем теперь перейти к обоснованию метода Ритца для нахождения собственных значений уравнения (XXXII.14) при условии (XXXII.15). Сущность его заключается в следующем.

Вместо того чтобы искать экстремумы функционала $Y(v)$ при условии $\iint\limits_{\Omega} v^2 dx\,dy = 1$ среди произвольных функций с ограниченными первыми производными и удовлетворяющих краевым условиям, ищут эти экстремумы среди линейных комбинаций

$$v = \sum_{i=1}^{N} z_i \omega_i,$$

где N — достаточно большое число, а функции ω_i образуют совершенно произвольную систему функций, удовлетворяющих условию (XXXII.15), которую выбирают так, чтобы с помощью их линейных комбинаций можно было бы приближённо представить несколько первых собственных функций U_i нашей задачи.

В частности, иногда бывает можно взять за ω_i систему многочленов от x, y или систему тригонометрических многочленов.

При этом мы будем иметь:

$$B(z) = \iint\limits_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^{N} z_i \omega_i \right) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^{N} z_i \omega_i \right) \right]^2 \right\} dx\,dy = \\ = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \beta_{ij} z_i z_j,$$

$$C(z) = \iint\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{N} z_i \omega_i \right)^2 dx\,dy = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} z_i z_j,$$

$$\iint\limits_{\Omega} \gamma^{(j)}(x, y) \left(\sum_{i=1}^{N} z_i \omega_i \right) dx\,dy = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^{(j)} z_i,$$

$$j = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Следовательно, нам нужно будет определить

$$\max \left\{ \min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} z_i z_j \right\} = \lambda'_m \tag{XXXII.19}$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} z_i z_j = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=3}^{N} \gamma_i^{(j)} z_i = 0, \tag{XXXII.20}$$

$$j = 1, 2, \ldots, m-1,$$

т. е. условные экстремумы формы $B(z)$ при условии $C(z)=1$.

Мы будем находиться, таким образом, в условиях примечания к теореме (XXXII.3). Величины λ'_m найдутся как корни уравнения:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \beta_{11}-\lambda c_{11}, & \beta_{12}-\lambda c_{12}, & \ldots, & \beta_{1N}-\lambda c_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{1N}-\lambda c_{1N}, & \beta_{2N}-\lambda c_{2N}, & \ldots, & \beta_{NN}-\lambda c_{NN} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что при некоторых дополнительных условиях значения первых из чисел $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$ будут мало отличаться от $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Замечание. Для всех j справедливо неравенство

$$\lambda'_j \geqslant \lambda_j.$$

В самом деле, если мы будем допускать до сравнения более узкий класс функций, от этого минимумы функционала могут только возрасти. Значит, может только возрасти функционал ψ, а следовательно, и его максимум, т. е. λ_m, что и требовалось доказать.

Теорема 6. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_m$ — система функций, ортогональных и нормированных в области Ω:

$$\iint_\Omega v_i v_j\,dx\,dy = \begin{cases} 1; & i=j, \\ 0; & i\neq j, \end{cases}$$

и таких, что $v_i|_S = 0$.

Допустим, что эти функции удовлетворяют неравенствам:

$$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial(U_i-v_i)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(U_i-v_i)}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy<\varepsilon_i, \quad \text{(XXXII.21)}$$

$$i=1, 2, \ldots, m,$$

где U_i — собственные функции уравнения (XXXII.14) при условии (XXXII.15). Составим квадратичную форму:

$$A(x_1, \ldots, x_i) = Y'(v) = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

положив

$$v=\sum_{i=1}^m x_i v_i,$$

и будем искать условные экстремумы этой формы при условии $\iint_\Omega v^2 dx\,dy = \sum_{i=1}^m x_i^2 = 1$ среди функций v, производные которых интегрируемы с квадратом. Пусть эти экстремумы в неубывающем порядке будут

$$\lambda_1' \leqslant \lambda_2' \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m'.$$

Тогда между собственными значениями формы $Y(v)$ и собственными значениями $Y'(v)$ имеют место неравенства

$$0 \leqslant \lambda_i' - \lambda_i \leqslant \delta_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m),$$

где δ_i стремится к нулю вместе со всеми ε_j.

Таким образом, если несколько первых ε_i стремятся к нулю, соответствующие λ_i' будут служить приближёнными значениями λ_i.

Докажем эту теорему.

Обозначим:

$$Y(u, v) = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Из неравенства Буняковского-Шварца следует

$$[Y(u, v)]^2 \leqslant Y(u)\, Y(v).$$

Заметим теперь, что

$$Y(v_i, v_j) - Y(U_i, U_j) = Y(v_i - U_i, v_j) + Y(U_i, v_j - U_j)$$

и в силу того же неравенства Шварца

$$|Y(v_i, v_j) - Y(U_i, U_j)| \leqslant \delta(\varepsilon_i, \varepsilon_j), \qquad \text{(XXXII.22)}$$

и, в частности, при $i = j$

$$|Y(v_i) - Y(U_i)| \leqslant \delta(\varepsilon_i). \qquad \text{(XXXII.23)}$$

В силу леммы 2, $Y(U_i, U_j) = 0$ при $i \neq j$; поэтому неравенство (XXXII.22) запишется так:

$$|Y(v_i, v_j)| \leqslant \delta(\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

Эта оценка позволяет дать приближённое выражение для $Y'(v)$. Мы имеем:

$$Y'(v) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 Y(v_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i x_j Y(v_i, v_j).$$

Отсюда

$$Y'(v)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i^2 = Y'(v)-\sum_{i=1}^{m} x_i^2 Y(U_i) =$$

$$=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_i x_j Y(v_i, v_j)+\sum_{i=1}^{m} x_i^2 (Y(v_i)-Y(U_i)).$$

Будем определять λ_k с помощью теоремы Куранта. Каковы бы ни были $\gamma^{(j)}$, $j=1, \ldots, (k-1)$, мы всегда можем взять в качестве допустимого вектора, удовлетворяющего (XXXII.20), вектор, в котором

$$x_{k+1}=x_{k+2}=\ldots=x_m=0;$$

N в условиях (XXXII.20) соответствует нашему m, а m — числу k.

При этом

$$A(x)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i^2 = Y'(v)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i^2=\sum_{i=1}^{k} x_i^2 (Y(v_i)-Y(U_i))+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_i x_j Y(v_i, v_j),$$

откуда, используя неравенства (XXXII.22) и (XXXII.23), имеем:

$$\left|Y'(v)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i^2\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} x_i^2 |Y(v_i)-Y(U_i)|+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_i^2+x_j^2}{2}|Y(v_i, v_j)|\leqslant \delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$$

и, значит,

$$A(x)=Y'(v)\leqslant \sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i^2+\delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)\leqslant \lambda_k+\delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k).$$

Отсюда следует сразу:

$$\min A(x)=\psi'(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1})\leqslant \lambda_k+\delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k),$$

и поэтому

$$\max \psi'(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1})=\lambda_k'\leqslant \lambda_k+\delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k).$$

Наша теорема доказана.

Замечание. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ — произвольная система функций, имеющих первые производные, удовлетворяющих предельным условиям и притом таких, что из них можно составить линейные комбинации

$$w_i = \sum_{k=1}^{m} \beta_{ik}\omega_k,$$

удовлетворяющие неравенствам (XXXII.21), а также неравенствам

$$\left|\iint_{\Omega} w_i w_j \, dx\, dy\right| < \varepsilon, \quad i \neq j,$$

$$\left|\iint w_i^2 \, dx\, dy - 1\right| < \varepsilon$$

(не обязательно ортогональные и нормированные). Тогда можно из них построить функции $v_i = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{ik} w_k$, удовлетворяющие всем условиям теоремы.

Действительно, для доказательства достаточно ортогонализировать и нормировать последовательно функции v_i одну за другой. Мы получим, например:

$$v_1 = \frac{w_1}{\sqrt{\iint_{\Omega} w_1^2 \, dx\, dy}}.$$

Знаменатель этой дроби мало отличается от единицы и, следовательно, $v_1 = w_1 + \eta_{11} w_1$, где η_{11} мало вместе с ε.

Далее,

$$\alpha_{21} = \iint_{\Omega} w_2 v_1 \, dx\, dy \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{w_2 - \alpha_{21} v_1}{\sqrt{\iint_{\Omega} (w_2 - \alpha_{21} v_1)^2 \, dx\, dy}};$$

α_{21} будет мало вместе с ε. Поэтому знаменатель формулы для v_2 будет мало отличаться от единицы и, значит,

$$v_2 = w_2 + \eta_{21} w_1 + \eta_{22} w_2,$$

где η_{21} и η_{22} малы вместе с ε.

Продолжая так далее, докажем, что каждая функция v_k представляется в виде

$$v_k = w_k + \eta_{k1} w_1 + \eta_{k2} w_2 + \ldots + \eta_{kk} w_k,$$

где все η_{ki} малы, если ε мало.

Функции v_k будут удовлетворять всем условиям теоремы. В самом деле,

$$Y(U_k - v_k) = Y(U_k - w_k - \eta_{k1}w_1 - \ldots - \eta_{kk}w_k) =$$
$$= Y(U_k - w_k) - 2\sum_{i=1}^{k} \eta_{ki} Y(U_k - w_k, w_i) +$$
$$+ 2\sum_{\substack{i=1\\i<j}}^{k}\sum_{j=1}^{k} \eta_{ki}\eta_{kj} Y(w_i, w_j) + \sum_{i=1}^{k} \eta_{ki}^2 Y(w_i).$$

Из малости η_{ki} и условия (XXXII.21) вытекает наше замечание.

Следствие. Если с помощью линейных комбинаций некоторой системы функций $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ можно приблизиться к первым k собственным функциям задачи

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$
$$u|_S = 0,$$

то собственные значения квадратичной формы

$$B(z) = Y(v),$$

где

$$v = \sum_{i=1}^{m} z_i \omega_i$$

при условии $C(z) = \iint\limits_{\Omega} v^2\, dx = 1$ сколь угодно близки к собственным значениям нашей задачи.

§ 5. Вычисление собственных функций.

Изложенные результаты позволяют легко вычислить собственные значения нашей задачи. Метод Ритца позволяет также получать собственные функции в последовательном порядке.

Будем называть множество всех линейных комбинаций

$$v = \sum_{i=1}^{N} z_i \omega_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad \text{(XXXII.24)}$$

линейным многообразием, а значения функционала $Y(v)$, где v—функция вида (XXXII.24), — значением его на этом многообразии.

Если принять во внимание тот факт, что для кратных собственных значений собственные функции с данным номером вообще определяются неоднозначно, соответствующая теорема формулируется так:

Теорема 7. Если функции $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \ldots, \bar{U}_k$ служат собственными функциями формы $Y(v)$ при условии

$$\iint\limits_{\Omega} v^2\,dx\,dy = 1$$

в некотором линейном многообразии M, причём соответствующие собственные значения $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_k$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant \bar{\lambda}_i - \lambda_i \leqslant \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

то собственные функции $U_1, U_2, \ldots, U_k$ можно выбрать таким образом, что

$$\iint\limits_{\Omega} (U_i - \bar{U}_i)^2\,dx\,dy \leqslant \eta_i(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i),$$

$$Y(U_i - \bar{U}_i) \leqslant \eta_i(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i),$$

где η_i стремится к нулю, если $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i$ стремятся к нулю.

Высказанная теорема является в известном смысле обратной по отношению к теореме 6.

Лемма 3. Пусть функция v_{i+1} удовлетворяет условиям

$$\iint\limits_{\Omega} v_{i+1} U_j\,dx\,dy = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, i,$$

$$Y(v_{i+1}) - \lambda_{i+1} < \varepsilon,$$

$$\iint\limits_{\Omega} v_{i+1}^2\,dx\,dy = 1. \tag{XXXII.25}$$

Тогда можно выбрать собственную функцию U_{i+1} так, что

$$\iint\limits_{\Omega} (v_{i+1} - U_{i+1})^2\,dx\,dy < \delta(\varepsilon),$$

$$Y(v_{i+1} - U_{i+1}) < \delta(\varepsilon), \tag{XXXII.26}$$

где $\delta(\varepsilon) \to 0$ вместе с ε.

В самом деле, пусть

$$\lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \ldots = \lambda_{i+k} < \lambda_{i+k+1}.$$

причём $U'_{i+1}, U'_{i+2}, \ldots, U'_{i+k}$ суть соответствующие собственные функции, выбранные каким-нибудь способом.

Составим функцию

$$U^*_{i+1} = \sum_{s=1}^{k} \beta_s U'_{i+s},$$

где

$$\beta_s = \iint_{\Omega} v_{i+1} U'_{i+s}\, dx\, dy.$$

Пусть $W_{i+1} = v_{i+1} - U^*_{i+1}$. Функция W_{i+1} ортогональна ко всем U'_s, $s = 1, 2, \ldots, i+k$.

На основании леммы 2 имеем:

$$Y(U'_s, W_{i+1}) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, i+k.$$

Следовательно,

$$Y(U'_{i+s}, v_{i+1}) = Y(U'_{i+s}, U^*_{i+1}) = \beta_s \lambda_{i+1}, \quad s = 1, 2, \ldots, k.$$

Составим выражение

$$Y(W_{i+1}) = Y\left(v_{i+1} - \sum_{s=1}^{k} \beta_s U'_{i+s}\right) =$$

$$= Y(v_{i+1}) + \sum_{s=1}^{k} \beta_s^2 Y(U'_{i+s}) - 2\sum_{s=1}^{k} \beta_s Y(v_{i+1}, Y'_{i+s}) =$$

$$= Y(v_{i+1}) - \lambda_{i+1} \sum_{s=1}^{k} \beta_s^2 = Y(v_{i+1}) - \lambda_{i+1} + \lambda_{i+1}\left(1 - \sum_{s=1}^{k} \beta_s^2\right),$$

откуда

$$Y(W_{i+1}) < \lambda_{i+1}\left(1 - \sum_{s=1}^{k} \beta_s^2\right) + \varepsilon.$$

С другой стороны, W_{i+1} ортогональна ко всем U_j:

$$j = 1, 2, \ldots, i+k.$$

Следовательно,

$$Y(W_{i+1}) > \lambda_{i+k+1} \iint_{\Omega} W^2_{i+1}\, dx\, dy = \lambda_{i+k+1}\left(1 - \sum_{s=1}^{k} \beta_s^2\right),$$

откуда

$$\lambda_{i+k+1}\left(1 - \sum_{s=1}^{k} \beta_s^2\right) < \lambda_{i+1}\left(1 - \sum_{s=1}^{k} \beta_s^2\right) + \varepsilon.$$

или

$$\left(1-\sum_{s=1}^{k}\beta_s^2\right)<\frac{\varepsilon}{\lambda_{i+k+1}-\lambda_{i+1}}.$$

За функцию U_{i+1} можно теперь взять функцию

$$U_{i+1}=\frac{U_{i+1}^*}{\sum\limits_{s=1}^{k}\beta_s^2}.$$

При этом

$$Y(v_{i+1}-U_{i+1})=Y[(v_{i+1}-U_{i+1}^*)+(U_{i+1}^*-U_{i+1})]=$$

$$=Y\left[W_{i+1}+U_{i+1}\left(\sum_{s=1}^{k}\beta_s^2-1\right)\right].$$

Отсюда с очевидностью следует второе из неравенств (XXXI.26). Первое неравенство есть следствие оценки

$$\frac{\iint\limits_{\Omega}(v_{i+1}-U_{i+1})^2\,dx\,dy}{Y(v_{i+1}-U_{i+1})}\leqslant\frac{1}{\lambda_i}.$$

Лемма 3 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 7.

Докажем прежде всего, что в условиях теоремы можно заменить функции $\widetilde{U}_k$ функциями $\widetilde{V}_k$, ортогональными ко всем U_i, $i=1, 2, \ldots, k$, и удовлетворяющими тем же условиям, что и $\widetilde{U}_k$.

С этой целью положим:

$$\widetilde{V}_k=\widetilde{U}_k-\sum_{s=1}^{k}\beta_{ks}U_s.$$

Коэффициенты β_{ks} будут малыми вместе с ε. Это следует из того, что

$$\beta_{ks}=\iint\limits_{\Omega}\widetilde{U}_kU_s\,dx\,dy=\iint\limits_{\Omega}(\widetilde{U}_k-U_k)\,U_s\,dx\,dy+\iint\limits_{\Omega}U_kU_s\,dx\,dy.$$

Далее, нормируя V_k, мы также мало изменим их. В результате мы придём к системе функций, удовлетворяющих лемме 2. Применением этой леммы теорема доказывается.

Доказанные теоремы дают критерий применимости метода Ритца. Этот критерий не выражен, к сожалению, только через данные элементы задачи и носит поэтому несколько условный характер.

Собственные значения $B(z)$ при условии $C(z)=1$, а также функции $\sum z_i^{(s)}\varphi_i$, где $z_i^{(s)}$ — собственный вектор, т. е. условные экстремумы $Y(v)$ при условии

$$\iint\limits_{S} v^2\,dx\,dy=1$$

в многообразии M дают приближение к собственным функциям задачи, если возможна хорошая аппроксимация при их помощи функций в конечном числе. Такая аппроксимация часто бывает осуществима. (Было бы гораздо труднее получить таким образом аппроксимацию всех собственных функций, так как это семейство не является равностепенно непрерывным.)

Пример. Рассмотрим колебания эллиптической мембраны

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

при условиях

$$u\,|_S=0.$$

Нетрудно видеть, что система функций

$$\psi_{kl}=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x}{a}\right)^k\left(\frac{y}{b}\right)^l,\quad k,\,l=0,\,1,\,\ldots,$$

при достаточно большом числе их удовлетворяет условиям теоремы 6 (XXII), так как линейная комбинация функций ψ_{kl} общего вида представляет собой произвольный многочлен, делящийся на $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$.

Приближая функцию

$$\frac{U_i}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}$$

вместе с производными, полиномом $P_n(x,\,y)$, мы получим для U_i аппроксимацию

$$\widetilde{U}_i=P_n(x,\,y)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right);$$

можно проверить, что функция $\widetilde{U}_i$ будет той, которая требуется в этой теореме.

Фактическое приближённое вычисление собственных частот колебаний мы предоставляем читателю.

Краткость рамок нашего курса не позволяет нам более детально рассматривать метод Ритца или другие методы приближённого решения уравнений математической физики. Мы не касаемся здесь ни вопроса о возможно точной оценке погрешности при пользовании методом Ритца, ни вопроса о решении неоднородных уравнений

$$Lu = f$$

этим методом.

Мы не затрагивали также другой метод приближённого решения уравнений математической физики — метод конечных разностей. Однако внимательный слушатель, познакомившись в течение этих лекций с основными идеями курса уравнений математической физики, сумеет, мы надеемся, уже сам проникнуть в современные мемуары и книги, посвящённые этому вопросу.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

(Цифры обозначают страницы.)